Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2020/21
31.01.2025

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 68:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y^2 \\ \rightsquigarrow \mathrm{d}y\frac{1}{y^2} &= -\mathrm{d}x \\ \rightsquigarrow \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{\eta^2}\mathrm{d}\eta &= -\int_0^x \mathrm{d}\xi \\ \Rightarrow -\left[\frac{1}{\eta}\right]_{\eta=-1}^{y(x)} &= -x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y(x)} &= x-1 \\ \Leftrightarrow y(x) &= \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

Die obige Formel gilt auf dem größten Intervall I mit $0 \in I$, $-(y(x))^2 \neq 0$ und $x-1<0$ für alle $x \in I$ — also $I = (-\infty, 1)$. Wegen $\lim_{x\to 1} y(x) = -\infty$, ist y nicht weiter nach rechts fortsetzbar und I ist das maximale Existenzintervall.

(ii) Die Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung. Ihre Lösung ist durch die Variation-der-Konstanten-Formel

$$y(x) = e^{\int_0^x 1\mathrm{d}\xi} \cdot y(0) + e^{\int_0^x 1\mathrm{d}\xi} \int_0^x e^{-\int_0^\eta 1\mathrm{d}\xi}(1+\eta)\mathrm{d}\eta$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Berechne

$$\begin{aligned} \int_0^x 1\mathrm{d}\xi &= x, \\ \int_0^x \underbrace{e^{-\eta}}_{=f'(\eta)} \underbrace{(1+\eta)}_{=g(\eta)}\mathrm{d}\eta &\overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[e^{-\eta}(1+\eta)\right]_{\eta=0}^x + \int_0^x e^{-\eta}\mathrm{d}\eta \\ &= 1-(1+x)e^{-x} - \left[e^{-\eta}\right]_{\eta=0}^x = 2-(2+x)e^{-x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist $y(x) = 2e^x - 2 - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

□

Aufgabe 69:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\sin(y)}{x} \\
\rightsquigarrow \mathrm{d}y\frac{1}{\sin(y)} &= \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
\rightsquigarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{y(x)} \frac{1}{\sin(\eta)}\mathrm{d}\eta &= \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{\xi}\mathrm{d}\xi \\
\overset{\text{vgl. A66(iv)}}{\Leftrightarrow} \left[\ln\left(\tan\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)\right]_{\eta=\frac{\pi}{2}}^{y(x)} &= [\ln(\xi)]_{\xi=\frac{1}{2}}^{x} \\
\Leftrightarrow \ln\left(\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right)\right) &= \ln(2x) \\
\Leftrightarrow y(x) &= 2\arctan(2x).
\end{aligned}$$

Die obige Formel gilt auf dem größten Intervall I mit $\frac{\pi}{2} \in I$, $\sin(y(x)) \neq 0$ und $0 < x$ für alle $x \in I$ (letzte Einschränkung kommt von der DGL). Wegen

$$0 < y(x) = 2\arctan(2x) < \pi$$

ist $I = (0, \infty)$. Dies ist das maximale Existenzintervall.

(ii) Die Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung. Ihre Lösung ist durch die Variation-der-Konstanten-Formel

$$y(x) = e^{-\int_0^x \frac{2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi} \cdot y(0) + e^{-\int_0^x \frac{2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi} \int_0^x e^{\int_0^\eta \frac{2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi} \frac{1}{1-\eta}\mathrm{d}\eta$$

für alle $x \in (-\infty, 1)$ gegeben.

Es gilt

$$\begin{aligned}
-\int_0^x \frac{2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi &= [2\ln(1-\xi)]_{\xi=0}^x = 2\ln(1-x), \\
\int_0^x e^{-2\ln(1-\eta)}\frac{1}{1-\eta}\mathrm{d}\eta &= \int_0^x \frac{1}{(1-\eta)^3}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-\eta)^2}\right]_{\eta=0}^x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right)
\end{aligned}$$

für alle $x \in (-\infty, 1)$. Folglich ist $y(x) = \frac{1-(1-x)^2}{2}$ für alle $x \in (-\infty, 1)$.

□

Aufgabe 70:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Abschnitt 13.5 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gegeben und hat genau die Nullstellen $\lambda_1 = (-1 - \mathrm{i})$ und $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = (-1 + \mathrm{i})$, jeweils mit Vielfachheit eins. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet daher

$$y_h(x) = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Für eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“

$$y_p(x) = xe^{-x}\left[C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\right]$$

und berechnen

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= e^{-x}[-(C_1x\cos(x) + C_2x\sin(x)) + (C_1\cos(x) + C_2\sin(x)) \\
&\quad +(-xC_1\sin(x) + xC_2\cos(x))] \\
&= e^{-x}\left[C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + (C_2 - C_1)x\cos(x) - (C_1 + C_2)x\sin(x)\right], \\
y_p''(x) &= e^{-x}[-(C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + (C_2 - C_1)x\cos(x) - (C_1 + C_2)x\sin(x)) \\
&\quad +(-C_1\sin(x) + C_2\cos(x)) + (C_2 - C_1)(\cos(x) - x\sin(x)) \\
&\quad -(C_1 + C_2)(\sin(x) + x\cos(x))] \\
&= e^{-x}\left[2(C_2 - C_1)\cos(x) - 2(C_1 + C_2)\sin(x) - 2C_2x\cos(x) + 2C_1x\sin(x)\right].
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
y_p''(x) + 2y_p'(x) + 2y_p(x) &= e^{-x}\cos(x) \\
\Leftrightarrow (2(C_2 - C_1)\cos(x) - 2(C_1 + C_2)\sin(x) - 2C_2x\cos(x) + 2C_1x\sin(x)) & \\
+2(C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + (C_2 - C_1)x\cos(x) - (C_1 + C_2)x\sin(x)) & \\
+2(C_1x\cos(x) + C_2x\sin(x)) &= \cos(x) \\
\Leftrightarrow 2C_2\cos(x) - 2C_1\sin(x) &= \cos(x) \\
\Leftrightarrow (2C_2 - 1)\cos(x) - 2C_1\sin(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt $C_1 = 0$ und $C_2 = \frac{1}{2}$. Damit ist $y_p(x) = \frac{x}{2}\sin(x)e^{-x}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1e^{-x}\cos(x) + C_2e^{-x}\sin(x) + \frac{x}{2}\sin(x)e^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned}
y(0) &= \left[C_1e^{-x}\cos(x) + C_2e^{-x}\sin(x) + \frac{x}{2}\sin(x)e^{-x}\right]_{x=0} = C_1 \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow C_1 &= 0, \\
y'(0) &= \left[C_2e^{-x}(\cos(x) - \sin(x)) + \frac{1}{2}e^{-x}(-x\sin(x) + \sin(x) + x\cos(x))\right]_{x=0} = C_2 \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow C_2 &= 0
\end{aligned}$$

Also ist $y = y_p$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

(ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Abschnitt 13.5 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gegeben und hat genau eine doppelte Nullstelle $\lambda_1 = 1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet daher

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Für eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“

$$y_p(x) = Cx^2 e^x$$

und berechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ce^x(x^2 + 2x), \\ y_p''(x) &= Ce^x(x^2 + 2x + 2x + 2) \\ &= Ce^x(x^2 + 4x + 2). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) &= e^x \\ \Leftrightarrow C((x^2 + 4x + 2) - 2(x^2 + 2x) + x^2) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2C &= 1 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist $y_p(x) = \frac{x^2}{2} e^x$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{x^2}{2} e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= \left[C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{x^2}{2} e^x \right]_{x=0} = C_1 \overset{!}{=} 1 \\ \Rightarrow C_1 &= 1, \\ y'(0) &= \left[e^x + C_2 (x+1) e^x + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^x \right]_{x=0} = 1 + C_2 \overset{!}{=} 2 \\ \Rightarrow C_2 &= 1. \end{aligned}$$

Also die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems durch $y(x) = e^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

□

Aufgabe 71:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Abschnitt 13.5 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gegeben und hat genau eine doppelte Nullstelle $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y_h(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Für eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite"

$$y_p(x) = Cx^2 e^{-\frac{x}{2}}$$

und berechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ce^{-\frac{x}{2}} \left(2x - \frac{x^2}{2}\right), \\ y_p''(x) &= Ce^{-\frac{x}{2}} \left((2-x) - \frac{1}{2}\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right) \\ &= Ce^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 2\right). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p''(x) + y_p'(x) + \frac{y_p(x)}{4} &= e^{-\frac{x}{2}} \\ \overset{e^{-\frac{x}{2}} \neq 0}{\Leftrightarrow} C\left(\left(\frac{x^2}{4} - 2x + 2\right) + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^2}{4}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2C &= 1 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist $y_p(x) = \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x}{2}}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= \left[C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x}{2}}\right]_{x=0} = C_1 \overset{!}{=} 1 \\ \Rightarrow C_1 &= 1, \\ y'(0) &= \left[-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} + C_2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} + \left(-\frac{x^2}{4} + x\right) e^{-\frac{x}{2}}\right]_{x=0} = C_2 - \frac{1}{2} \overset{!}{=} 1 \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \left(1 + \frac{3x + x^2}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

(ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Abschnitt 13.5 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gegeben und hat genau die Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$, jeweils mit Vielfachheit eins. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y_1(x) = C_1 + C_2 e^{2x} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Setze $f_1(x) = -2x$, $f_2(x) = \sin(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimme partikuläre Lösungen für die Inhomogenitäten f_1 bzw. f_2 jeweils durch einen Ansatz „von der Form der rechten Seite".

- f_1 (Nullstelle des charakteristischen Polynoms): Mache Ansatz

  $$y_p^{(1)}(x) = x(a_0 + a_1 x) = a_0 x + a_1 x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

  Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

  $$\begin{aligned} y_p^{(1)\prime\prime}(x) - 2y_p^{(1)\prime}(x) &= f_1(x) \Leftrightarrow 2a_1 - 2a_0 - 4a_1 x = -2x \\ \overset{\text{Koeff.-Vergleich}}{\Leftrightarrow} \quad -4a_1 = -2 \quad &\wedge \quad 2a_1 - 2a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{1}{2} \quad &\wedge \quad a_0 = a_1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

  Also ist $y_p^1(x) = \frac{x(1+x)}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung zur Inhomogenität f_1.

- f_2 (keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms): Mache Ansatz

  $$y_p^{(2)}(x) = (a_0 \cos(2x) + a_1 \sin(2x)) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

  Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

  $$\begin{aligned} y_p^{(2)\prime\prime}(x) - 2y_p^{(2)\prime}(x) &= f_2(x) \\ \Leftrightarrow -4a_0 \cos(2x) - 4a_1 \sin(2x) + 4a_0 \sin(2x) - 4a_1 \cos(2x) &= \sin(2x) \\ \overset{\text{Koeff.-Vergleich}}{\Leftrightarrow} \quad -4a_0 - 4a_1 = 0 \quad &\wedge \quad -4a_1 + 4a_0 = 1 \\ a_0 = -a_1 \quad &\wedge \quad a_0 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

  Also ist $y_p^2(x) = \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung zur Inhomogenität f_2.

Insgesamt ist

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{x(1+x)}{2} + \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + \frac{1}{8} \stackrel{!}{=} \frac{1}{8} \\ \Rightarrow C_1 &= -C_2, \\ y'(0) &= \left[2C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} + x - \frac{1}{4}\left(\sin(2x) + \cos(2x)\right) \right]_{x=0} = 2C_2 + \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow C_2 &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \frac{1 - e^{2x}}{8} + \frac{x(1+x)}{2} + \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

□

Aufgabe 72:

(i) Für jedes $b > 2$ gilt

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x \underset{\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y s}{\overset{x=e^y}{=}} \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = -\left[\frac{1}{y}\right]_{y=\ln(2)}^{\ln(b)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(b)}.$$

Folglich ist das uneigentliche Integral $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x$ konvergent und es gilt

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(b)}\right) = \frac{1}{\ln(2)}.$$

(ii) Für alle $0 < x \le 1$ gilt $x^2 < x < \sqrt{x}$. Damit folgt

$$0 < \left| \frac{1}{2\sqrt{x} - x^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \underbrace{(\sqrt{x} - x^2)}_{>0}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

für alle $0 < x \le 1$. Sei $0 < a < 1$. Es gilt

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\left[\sqrt{x}\right]_{x=a}^1 = 2 - 2\sqrt{a} \xrightarrow{a\to 0+} = 2.$$

Also ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium aus Abschnitt 14.4 des Skriptes ist auch das Integral $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2}\mathrm{d}x$ (absolut) konvergent.

(iii) Für alle $x \in [1,\infty)$ gilt $1 + \frac{1}{2}\cos^{2017}(x) \ge \frac{1}{2}$ und folglich $\frac{1+\frac{1}{2}\cos^{2017}(x)}{x} \ge \frac{1}{2x} > 0$. Ferner ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \left[\ln(x)\right]_{x=1}^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \ln(b) = \infty.$$

Nach dem Minorantenkriterium für uneigentliche Integrale aus Abschnitt 14.4 des Skriptes ist auch das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1+\frac{1}{2}\cos^{2017}(x)}{x}\mathrm{d}x$ divergent.

□

Aufgabe 73:

(i) Für jedes $x \in (0, \pi)$ gilt

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} = \frac{x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{x\sin(x)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k-1}}{\frac{\sin(x)}{x}}.$$

Alle vorkommenden Potenzreihen haben unendlichen Konvergenzradius. Die Funktion $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ lässt sich stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen, wobei die Fortsetzung in 0 keine Nullstelle hat. Folglich ist das Integral bei 0 nicht uneigentlich.

(ii) Für jedes $b > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^b \underbrace{e^{-x}}_{f'(x)} \underbrace{\ln(1+x)}_{g(x)} \mathrm{d}x &\overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[e^{-x}\ln(1+x)\right]_{x=0}^b + \int_0^b e^{-x} \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\log(1+b)}{e^b} + \int_0^b e^{-x} \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\log(1+b)}{\underbrace{e^b}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1+b)\underbrace{e^b}_{\neq 0}} = 0$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-x}\log(1+x)\mathrm{d}x$ genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$ konvergent ist. Dieses ist tatsächlich der Fall nach dem Majorantenkriterium aus Abschnitt 14.4 des Skriptes. Für alle $0 \le x < \infty$ gilt

$$e^{-x}\frac{1}{1+x} \le e^{-x}, \text{ und } \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\mathrm{d}x \lim_{b\to\infty} -\left[e^{-x}\right]_{x=0}^b = 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1.$$

(iii) Wir untersuchen den Integranden „in der Nähe der unteren Grenze". Es gilt

$$\log(x) \le \log\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

für alle $0 < x \le \frac{1}{e}$. Ferner folgt aus der Potenzreihendarstellung des sinh

$$\begin{aligned} 0 < \sinh(x) - x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} x^{2n+3} = x^3 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} x^{2n}}_{=:h(x)>0} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die durch den obigen Ausdruck definierte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist als Potenzreihe stetig und nimmt auf $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ ihr Maximum M an. Folglich gilt

$$-\frac{x\ln(x)}{\sinh(x) - x} \ge \frac{x\ln(e)}{x^3 h(x)} \ge \frac{1}{x^2 M}$$

für alle $0 < x \leq \frac{1}{e}$. Wegen

$$\int_a^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^2 M} \mathrm{d}x = -\frac{1}{M} \left[\frac{1}{x} \right]_{x=a}^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{M} \left(\frac{1}{a} - e \right) \xrightarrow{a \to 0+} \infty$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^2 M} \mathrm{d}x$ divergent. Nach dem Minorantenkriterium aus Abschnitt 14.4 des Skriptes ist dann auch das uneigentliche Integral

$$-\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{x \ln(x)}{\sinh(x) - x} \mathrm{d}x$$

divergent. Nach Definition aus Abschnitt 14.1 des Skriptes ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x \ln(x)}{\sinh(x) - x} \mathrm{d}x$$

ebenfalls divergent.

□

Aufgabe 74:

(i) Um zu zeigen, dass U ein UVR ist müssen wir nur prüfen ob die konstante nullfolge in diesem Raum ist und ob er abgeschlossen bezüglich elemntweiser addition und skalarer multiplikation ist. Die Nullfolge ist trivialerweise im Raum. Angenommen $u_1, u_2 \in U$ mit $u_1 = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $u_1 = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann ist $u = u_1 + u_2 = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und anhander der Definition von U gilt dann sofort

$$x_{n+2} + y_{n+2} = x_{n+1} + y_{n+1} + x_n + y_n \,.$$

Für die skalara multiplikation ist der Beweis ähnlich.

(ii) Sei nun $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Damit $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \in U$ muss gelten

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n \,. \tag{1}$$

Wir teilen durch $\lambda^n > 0$ so, dass

$$\lambda^2 = \lambda^1 + 1, \tag{2}$$

was für $\lambda_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$ erfüllt wird. Die Zahl λ_+ wird auch goldener Schnitt genannt.

Aufgabe 75:

1. *Demtröders Güterzug* Nach Aufgabenstelltung kann man die gewöhnliche DGL 1. Ordnung aufstellen

$$0 = \dot{m}v + m\dot{v} = Av + m\dot{v} \tag{3}$$

mit dem Anfangswert $v(0) = v_0$. Desweiteren ist $\dot{m} = A$ und $m(0) = m_0$ so, dass

$$m(t) = m_0 + At \,. \tag{4}$$

Wir lösen diese DGL durch Trennung der Veränderlichen so, dass

$$\partial_t \ln(v) = \frac{\dot{v}}{v} = -\frac{A}{m_0 + At} = \,. \tag{5}$$

Mittels Integration finden wir

$$ln(v(t)) = -\ln(m_0 + At) + c, \quad c \in \mathbb{R}\,. \tag{6}$$

Umstellen nach $v(t)$ liefert

$$v(t) = \frac{C}{m_0 + At}, \quad C \in \mathbb{R} \tag{7}$$

Da $v(0) = v_0$ muss also $C = v_0 m_0$ gelten so, dass

$$v(t) = \frac{m_0}{m_0 + At}\, v_0\,. \tag{8}$$

Damit $v(t) = v_0/2$ ist muss also $At = m_0$ gelten wie gefordert.

2. *Gravitationspendel* Durch den Aufgabentext erhalten wir folgende DGL 2. Ordnung

$$m\ddot{r} = -\delta\dot{r} - mG\rho\frac{4\pi}{3}r\,. \tag{9}$$

Wir definieren

$$\omega^2 = G\rho\frac{4\pi}{3} \tag{10}$$

und machen den Ansatz $r(t) = e^{\lambda t}$ und setzen diesen in die DGL ein und finden das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \frac{\delta}{m}\lambda + \omega^2 = 0, \tag{11}$$

was genau erfüllt ist, falls

$$\left(\lambda + \frac{\delta}{2m}\right)^2 = \frac{\delta^2}{4m^2} - \omega^2\,. \tag{12}$$

Wir finden also die Lösungen

$$\lambda = -\frac{\delta}{2m} \pm \left(\frac{\delta^2}{4m^2} - \omega^2\right)^{1/2} \tag{13}$$

Im ersten Teil der Aufgabe gilt $\delta = 0$ so, dass

$$\lambda = \pm i\omega\,. \tag{14}$$

gilt. Durch geschicktes anordnern der Fundamentallösungen finden wir also die beiden reellen Lösungen

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \cos(\omega t) \\ r_2(t) &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{15}$$

Die allgemeine Lösung des problems ist also

$$r(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\,. \tag{16}$$

Wenn man annimmt, dass man zum Zeitpunkt $t = 0$ in das Pendel springt mus $r(0) = R$ der Radius der Erde sein so, dass $A = 0$ und $B = R$. Die Frequenz der Oszillation ist dann gerade ω.

Im zweiten Fall wollen wir keine Oszillationen. Daher darf λ keine komplexen Lösungen haben also muss $\delta \in \mathbb{R}$ so, gewählt werden, dass

$$\frac{\delta^2}{4m^2} - \omega^2 = 0 \tag{17}$$

Wir wählen also $\delta = 2m\omega$. Damit wir die Lösung

$$r_1(t) = c_1 e^{-2m\omega t}. \tag{18}$$

Durch Variation der Konstante c_1 findet man die weitere Lösung

$$r_2(t) = c_2 t e^{-2m\omega t} \tag{19}$$

und insgesamt

$$r(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2m\omega t}. \tag{20}$$

Bei $t = 0$ gilt $r(0) = R$ also $c_1 = R$ damit gilt

$$r(t) = (R + c_2 t)e^{-2m\omega t}. \tag{21}$$

Desweitern gilt $\dot{r}(0) = 0$ und damit $2m\omega R = c_2$. Beachte $r(t) \geq 0$ $r(t) \to 0$ für $t \to \infty$ wie in der Aufgabe gefordert (keine Oszillation).