

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

### 14. Übungsblatt

**Aufgabe 77:** [lineare Unabhängigkeit **T**]

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$  Vektorraum,  $n \in \mathbb{N}$  sowie  $v_1, v_2, \dots, v_N \in V$  linear unabhängige Vektoren.  
Sei nun  $v \in V$  dann gilt

$v \notin \text{lin}(\{v_1, v_2, \dots, v_N\}) \Leftrightarrow v, v_1, v_2, \dots, v_N$  sind linear unabhängig.

**Aufgabe 78:**

Es sei

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ so, dass } x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \right\}.$$

Ferner sei

$$\vec{b}_j := (j+1)\vec{e}_1 - (-1)^j \vec{e}_{j+1}$$

für jedes  $j \in \{1, 2, 3\}$ , wobei  $\vec{e}_j$  den  $j$ -ten Einheitsvektor in  $\mathbb{R}^4$  bezeichne.

i) Zeigen Sie, dass  $U = \text{lin}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  gilt, und begründen Sie, dass die Vektoren  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  eine Basis von  $U$  bilden.

ii) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ .

**Aufgabe 79:** [Zeilennormalform **T**]

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  eine Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Für welche  $\alpha, \beta$  sind die Zeilen linear unabhängig? **Aufgabe 80:**

Bestimmen Sie eine Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sind die Zeilen linear unabhängig?

**Aufgabe 81:** [Zeilennormalform **T**]

Es seien

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

- (a)  $\text{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) \subseteq U$
- (b)  $u_1, u_2, u_3$  bilden eine Basis von  $U$

**Aufgabe 82:**

Seien  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$  gegeben durch

$$u_1(t) = e^{-\gamma t} \cosh(\kappa t), \quad u_2(t) = e^{-\gamma t} \frac{1}{\kappa} \sinh(\kappa t), \quad v_1(t) = e^{(-\gamma+\kappa)t}, \quad v_2(t) = e^{(-\gamma-\kappa)t}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit den Konstanten  $\gamma, \kappa > 0$ . Zeigen Sie:

- (a)  $\{u_1, u_2\}$  ist linear unabhängig
- (b)  $\text{lin}(\{u_1, u_2\}) = \text{lin}(\{v_1, v_2\})$