

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

### Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

#### Aufgabe 77:

(i)

Angenommen  $v \in \text{lin}(\{v_1, v_2, \dots, v_N\})$ , dann ex.  $a_1, \dots, a_N$  wobei mindiestens ein  $a_i \neq 0$  so, dass

$$v = \sum_{i=1}^N a_i v_i \quad (1)$$

und damit gilt sofort

$$v - \sum_{i=1}^N a_i v_i = 0 \quad (2)$$

und damit sind  $v, v_1, \dots, v_N$  linear abhängig. Wir haben also bewiesen

$$v \in \text{lin}(\{v_1, v_2, \dots, v_N\}) \Rightarrow v, v_1, \dots, v_N \text{ sind linear abhängig} \quad (3)$$

wir zeigen noch die umgekehrte Richtung. Angenommen  $v, v_1, \dots, v_N$  linear abhängig dann ex.  $a_1, \dots, a_N$  wobei mindiestens ein  $a_i \neq 0$  also so, dass (2) gilt und damit auch (1) und damit ist  $v \in \text{lin}(\{v_1, v_2, \dots, v_N\})$ . Es ist also

$$v \in \text{lin}(\{v_1, v_2, \dots, v_N\}) \Leftrightarrow v, v_1, \dots, v_N \text{ sind linear abhängig.} \quad (4)$$

Die gesuchte Aussage folgt sofort als Negation der bewiesenen Aussage.

#### Aufgabe 78:

Es ist

$$\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen  $2 + (-2) \cdot 1 = 3 + 3 \cdot (-1) = 4 + (-4) \cdot 1 = 0$  gilt  $\tilde{b}_j \in U$  für jedes  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

Außerdem sind die Vektoren  $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$  linear unabhängig: Sind  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  und gilt

$$\alpha_1 \tilde{b}_1 + \alpha_2 \tilde{b}_2 + \alpha_3 \tilde{b}_3 = \vec{0},$$

so folgt durch Betrachtung der zweiten bis vierten Vektorkomponente direkt, dass  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  gelten muss.

Definiert man nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$

so ist

$$U = \ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = \vec{0}\}.$$

Insbesondere ist  $U$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^4$ . Da  $A \neq 0$  ist, ist

$$\dim(\text{Bild } A) = \dim\{Ax : x \in \mathbb{R}^4\} = 1.$$

Nach der Dimensionsformel folgt

$$\dim U = \dim \ker A = 4 - \dim A = 3.$$

Da  $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$  drei linear unabhängige Vektoren aus  $U$  sind, bilden diese eine Basis von  $U$ . Hieraus folgt auch

$$U = \text{lin}\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3\}.$$

(ii)

Es gilt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit besitzt  $\vec{v}$  die Koordinaten  $-3, 0, 4$  bezüglich der Basis  $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ .

### Aufgabe 79:

Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow \cdot 2 \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \\ \cdot (-4) \\ + \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \cdot \frac{1}{2} \\ \leftarrow \cdot \frac{1}{4} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \cdot \frac{1}{2} \\ \leftarrow \cdot \frac{1}{4} \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die letzte Matrix ist für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  in Zeilenstufenform. Ablesen liefert den Zeilenrang  $r = 4$ , für  $\alpha \neq 10$  oder  $\beta \neq 4$ . Ansonsten ist  $r = 3$ . Nach Abschnitt 14.8 der Vorlesung ( $r = n$ ), sind die Zeilen von  $A$  damit linear unabhängig genau dann, wenn  $\alpha \neq 10$  oder  $\beta \neq 4$  gilt. Sind  $\alpha = 10$  und  $\beta = 4$ , so ist die letzte Matrix bereits die Zeilennormalform von  $B$ . Ist  $\alpha = 10$  aber  $\beta \neq 4$ , so ist

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \cdot \frac{1}{\beta - 4} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot \frac{-3}{\beta - 4} \end{array} \left| \cdot \frac{1}{\beta - 4} \right. \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von  $B$ . Ist  $\alpha \neq 10$ , so sei  $\kappa = \frac{\beta-4}{\alpha-10}$  und es gilt

$$\begin{aligned}
 B &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} \Big| \cdot \frac{1}{\alpha-10} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -4 \end{array} \Big] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot (-6) \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3-6\kappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1+4\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

die Zeilennormalform von  $B$ .

□

### Aufgabe 80:

Wir zeigen vorbereitend, dass  $U$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^4$  ist. Nach dem Untervektorraumkriterium aus Abschnitt 14.4 der Vorlesung ist zu zeigen:

- $0 \in U$ : dies ist klar.
- Für alle  $x, y \in U$  und alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $x + y \in U$  und  $\alpha x \in U$ : Es gilt in der Tat

$$(x+y)_1 + (x+y)_2 - (x+y)_3 - (x+y)_4 = \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)}_{=0} + \underbrace{(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)}_{=0} = 0$$

sowie

$$(\alpha x)_1 + (\alpha x)_2 - (\alpha x)_3 - (\alpha x)_4 = \alpha \cdot \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)}_{=0} = 0.$$

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
 (-3) + 2 - (-3) - 2 &= 0 & (u_1) \\
 3 + (-1) - 1 - 1 &= 0 & (u_2) \\
 -7 + 3 - (-7) - 3 &= 0 & (u_3)
 \end{aligned}$$

und damit  $u_1, u_2, u_3 \in U$ . Sei nun  $x \in \text{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$ . Es existieren also  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  mit

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

Da nach Obigem  $U$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^4$  ist und  $u_1, u_2, u_3 \in U$ , liegt auch ihre Linearkombination  $x$  in  $U$ .

(b) Zuerst zeigen wir, dass die Menge  $\{u_1, u_2, u_3\}$  linear unabhängig ist. Dazu schreiben wir

die Vektoren  $u_1, u_2, u_3$  als Zeilen der Matrix  $A$  und bringen diese auf Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot \frac{3}{7} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{7} & -2 & \frac{16}{7} \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot 7 \\ | \cdot 7 \\ | \cdot 7 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -14 & 16 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot (-2) \\
 &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow -\frac{1}{10} \\ \leftarrow -\frac{1}{10} \\ \leftarrow -\frac{1}{10} \end{array} \sim \begin{pmatrix} -7 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ablesen liefert den Zeilenrang  $r = 3$ . Nach Abschnitt 14.8 der Vorlesung ( $r = n$ ), sind die Zeilen von  $A$  damit in der Tat linear unabhängig.

Als nächstes sehen wir ein, dass  $\text{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) = U$  ist. Dazu stellen wir fest, dass  $U \neq \mathbb{R}^4$ , denn

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U.$$

Also ist  $\dim U < 4$ , denn ansonsten wäre  $\dim \mathbb{R}^4 \leq \dim U = 4 < \infty$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^4$  und damit, nach Abschnitt 14.10 der Vorlesung,  $U = \mathbb{R}^4$ .

Dann ist also  $\dim U \leq 3 = \dim \text{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$ ,  $\text{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) \subseteq U$  nach Teilaufgabe (a) und damit, nach Abschnitt 14.10 der Vorlesung,  $U = \text{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$ .

□

### Aufgabe 81:

(a) Seien  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  und der Nullvektor  $0 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 =: u$  sei als eine Linearkombination von  $u_1, u_2$  geschrieben. Wir haben zu zeigen:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Dazu betrachten wir:

$$u(0) = \alpha_1 u_1(0) + \alpha_2 u_2(0) = \alpha_1 \underbrace{e^{-\gamma \cdot 0}}_{=1} \underbrace{\cosh(\kappa \cdot 0)}_{=1} + \alpha_2 e^{-\gamma \cdot 0} \frac{1}{\kappa} \underbrace{\sinh(\kappa \cdot 0)}_{=0} = \alpha_1 = 0$$

$$u'(0) = \underbrace{\alpha_1}_{=0} u_1'(0) + \alpha_2 u_2'(0) = \alpha_2 \left( \underbrace{e^{-\gamma \cdot 0}}_{=1} \underbrace{\cosh(\kappa \cdot 0)}_{=1} - \frac{\gamma}{\kappa} e^{-\gamma \cdot 0} \underbrace{\sinh(\kappa \cdot 0)}_{=0} \right) = \alpha_2 = 0$$

□

(b) Wir zeigen zunächst  $U := \text{lin}(\{u_1, u_2\}) \subseteq V := \text{lin}(\{v_1, v_2\})$ : Sei dazu  $u \in U$  beliebig. Es

existieren dann  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  mit  $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ . Für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) = \alpha_1 e^{-\gamma t} \cosh(\kappa t) + \alpha_2 e^{-\gamma t} \frac{1}{\kappa} \sinh(\kappa t) \\ &= \alpha_1 e^{-\gamma t} \left( \frac{e^{\kappa t} + e^{-\kappa t}}{2} \right) + \frac{\alpha_2}{\kappa} e^{-\gamma t} \left( \frac{e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}}{2} \right) \\ &= e^{-\gamma t} \left( \frac{\kappa \alpha_1 + \alpha_2}{2\kappa} e^{\kappa t} + \frac{\kappa \alpha_1 - \alpha_2}{2\kappa} e^{-\kappa t} \right) = \underbrace{\frac{\kappa \alpha_1 + \alpha_2}{2\kappa}}_{=:\beta_1} e^{(-\gamma+\kappa)t} + \underbrace{\frac{\kappa \alpha_1 - \alpha_2}{2\kappa}}_{=:\beta_2} e^{(-\gamma-\kappa)t} \\ &= \beta_1 v_1(t) + \beta_2 v_2(t) \end{aligned}$$

Also ist  $u$  auch eine Linearkombination der  $v_1, v_2$ . Da  $u$  beliebig war, gilt in der Tat  $U \subseteq V$ .

Nach Teilaufgabe (a) ist  $\{u_1, u_2\}$  linear unabhängig. Damit ist  $\dim V \leq 2 = \dim U$ . Nach Abschnitt 14.10 der Vorlesung gilt damit  $U = V$ .

□