

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

15. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind von unterschiedlichen Klausuren bzw. Altklausuren zusammengetragen.

Aufgabe 77:

Es seien $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $g(x) = \exp(x)$ und $f(x) = \exp(-x)$.

- (i) Es sei $V := \text{lin}\{f, g\}$ der von f, g aufgespannte Unterraum von $\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass f, g eine Basis von V ist.
- (ii) Wir untersuchen die lineare Abbildung,

$$\Phi : V \rightarrow V, \quad \Phi(h) = h + 2h'.$$

Wählen Sie eine Basis von V und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 78:

Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie s und t so, dass $\text{Kern}(A) \neq \{0\}$ gilt. Bestimmen Sie in diesem Falle eine Basis von $\text{Kern}(A)$.

Aufgabe 79:

a) Bestimmen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ und die Vektoren $b, c \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $Ax = b$ und $Ax = c$.
- (ii) Bestimmen Sie die Dimension von $\text{Kern}(A)$ und geben Sie eine Basis davon an.