Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2020/21
14.02.2025

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 77:

i) f, g spannen V nach Definition auf, es bleibt zu zeigen, dass f, g linear unabhängig sind.

Es ist

$$\begin{aligned} af(x) + bg(x) = 0 &\Leftrightarrow ae^x + be^{-x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow ae^{2x} = -b \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

also für $x = 0$ muss $a = -b$ und daher

$$ae^{2x} - a = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Falls $a \neq 0$, dann

$$e^{2x} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

was für $x = 1$ offensichtlich ein Widerspruch ist, und damit muss $a = b = 0$ gelten.

Damit sind aber f, g linear unabhängig und bilden damit eine Basis von V.

ii) Nach i) bildet f, g eine Basis von V. Wir wählen diese Basis $b_1 = f$ und $b_2 = g$, dann gilt

$$\Phi(b_1) = b_1 + 2b_1 = 3b_1$$

$$\Phi(b_2) = b_2 - 2b_2 = -b_2$$

Wir lesen die Darstellungsmatrix B ab. Es ist

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 78: Siehe kopierte Lösung in Abbildung 1.

Aufgabe 79: a) Siehe kopierte Lösung in Abbildung 2

b) (i) Wir formen die erweiterte Matrix $(A|b|c)$ auf Zeilennormalform um, damit wir die Lösungen ablesen können.

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & -2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & -2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 4 & \frac{3}{3} & \frac{11}{3} & 1 \end{array}\right) \quad | \cdot 3$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & -2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right) \quad | \cdot \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Dies bedeutet, dass die Gleichung $Ax = b$ nicht lösbar ist, da $\operatorname{rg}(A) < \operatorname{rg}(A|b)$. Die Gleichung $Ax = c$ ist lösbar, die verbleibenden Gleichungen sind

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

und somit

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 3 - 4x_3 - 3x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Durch die Wahl von freien Parametern für x_3 und x_4 ergibt sich als Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(ii) Kern A ist die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$. In (i) haben wir bereits die Zeilennormalform von A gesehen, anhand derer wir analog die Lösung ablesen (ersetze den umgeformten Vektor c durch den Nullvektor). Der Kern ist somit gegeben durch

$$\text{Kern } A = \left\{ s \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Da die beiden Vektoren, die den Kern aufspannen, offensichtlich linear unabhängig sind (es befinden sich Einsen an Stellen, an denen der jeweils andere Vektor eine Null besitzt), bilden diese eine Basis von Kern A, welcher deshalb die Dimension 2 hat.

b) Wir bestimmen zunächst die Zeilenstufenform von A.

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&t\\s&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot(-s)} \begin{pmatrix}1&2\\0&t\\0&1-2s\end{pmatrix}.$$

Damit hat A genau dann einen nicht-trivialen Kern, wenn $t = 0$ und $s = \frac{1}{2}$. In diesem Fall ist

$$\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

eine Basis des Kerns.

Abbildung 1: Kopie der alten Musterlösung.

(b) Wir formen die erweiterte Matrix $(A|b)$ durch die folgenden Schritte in Zeilenstufenform um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&2&3&0\\1&3&2&3\end{array}\right) \begin{array}{l}\cdot(-1)\ \ \cdot(-1)\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&2&-3\\0&2&1&0\end{array}\right) \cdot(-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&2&-3\\0&0&-3&6\end{array}\right) \mid \cdot(-1/3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&2&-3\\0&0&1&-2\end{array}\right) \begin{array}{l}\cdot(-1)\ \ \cdot(-2)\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&5\\0&1&0&1\\0&0&1&-2\end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4\\0&1&0&1\\0&0&1&-2\end{array}\right)$$

Somit ist die Lösung des Gleichungssystems gegeben durch $x = (4, 1, -2)$. □

Abbildung 2: Kopie der alten Musterlösung.