

1. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

Behandelt am 6. November 2025

Aufgabe 1 (Übung):

Seien A, B und C Aussagen. Vereinfachen Sie die folgenden Aussagen, d.h. bestimmen Sie jeweils eine äquivalente Aussage in möglichst kurzer Darstellung.

(a) $A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)]$

(b) $A \wedge [\neg A \vee (B \wedge C) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge B)]$

Aufgabe 2 (Übung):

Es seien A, M_1, M_2 Mengen. Zeigen Sie:

(a) $A \times (M_1 \cup M_2) = (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$

(b) $\text{Pot}(M_1) \cup \text{Pot}(M_2) \subseteq \text{Pot}(M_1 \cup M_2)$

(c) Gilt in (b) auch die umgekehrte Inklusion? Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 3 (Übung):

Seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie für beliebige $M_1, M_2 \subseteq Y$ und $M_3, M_4 \subseteq X$

(i) $f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2)$,

(ii) $f(M_3 \cap M_4) \subseteq f(M_3) \cap f(M_4)$,

(iii) $f(M_3 \cup M_4) = f(M_3) \cup f(M_4)$.

Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass in ((ii)) keine Gleichheit

Aufgabe 4 (Tutorium):

- (a) Vereinfachen Sie durch logische Umformungen die Aussage $\neg A \vee (B \wedge A)$.
- (b) Sei M eine Menge von Aussagen. Auf M sei eine Relation R gegeben durch $ARB := [A \Leftrightarrow B]$. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation auf M ist.

Aufgabe 5 (Tutorium):

Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$, sowie $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die folgenden Aussagen:

- (i) Ist f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
- (ii) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch g injektiv.
- (iii) Ist f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
- (iv) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch f surjektiv.
- (v) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.
- (vi) Ist f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.
- (vii) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.
- (viii) Ist $g \circ f$ nicht injektiv, so gilt: f ist nicht injektiv und g ist nicht injektiv.
- (ix) Ist $g \circ f$ nicht surjektiv, so gilt: f ist nicht surjektiv und g ist nicht surjektiv.

Aufgabe 6 (Tutorium):

Seien A, B und C Mengen. Sind die folgenden Aussagen stets wahr oder (zumindest manchmal) falsch?

- (a) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. (e) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} (C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus (A \times B)$.
- (b) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} A \subsetneq \text{Pot}(A)$. (f) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \emptyset \times A = \emptyset$.
- (c) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} A \in \text{Pot}(A)$. (g) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$.
- (d) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \text{Pot}(A \times B) = \text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B)$. (h) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \{1, 2, 3\} = \{\text{Eins, Zwei, Drei}\}$.