

Lösungsvorschlag zum 1. Übungsblatt
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
 Wintersemester 2025/26
 6. November 2025

Aufgabe 1 (Übung):

Seien A , B und C Aussagen. Vereinfachen Sie die folgenden Aussagen, d.h. bestimmen Sie jeweils eine äquivalente Aussage in möglichst kurzer Darstellung.

- (a) $A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)]$
 (b) $A \wedge [\neg A \vee (B \wedge C) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge B)]$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

Im folgenden verwenden wir die Assoziativgesetze

$$(1) \quad (A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C) \quad \text{und} \quad (A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C).$$

und die Distributivgesetze

$$(2) \quad (A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \quad \text{und} \quad (A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C).$$

Außerdem verwenden wir dass die Aussage $A \vee \neg A$ immer wahr und die Aussage $A \wedge \neg A$ immer falsch ist. Für jede Aussage B folgt daraus

$$(3) \quad B \wedge (A \vee \neg A) \iff B \quad \text{und} \quad B \vee (A \wedge \neg A) \iff B.$$

- (a) Mit den obigen Regeln vereinfachen wir

$$\begin{aligned}
 A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)] &\stackrel{(1)}{\iff} A \wedge [((C \wedge \neg B) \vee B) \vee \neg A] \\
 &\stackrel{(2)}{\iff} (A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee B]) \vee (A \wedge \neg A) \\
 &\stackrel{(3)}{\iff} A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee B] \\
 &\stackrel{(2)}{\iff} A \wedge [(C \vee B) \wedge (\neg B \vee B)] \\
 &\stackrel{(3)}{\iff} A \wedge (C \vee B)
 \end{aligned}$$

- (b) Mit den obigen Regeln vereinfachen wir

$$\begin{aligned}
 A \wedge [\neg A \vee (B \wedge C) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge B)] &\stackrel{(2)}{\iff} (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge [(B \wedge C) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge B)]) \\
 &\stackrel{(3)}{\iff} A \wedge [(B \wedge C) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge B)] \\
 &\stackrel{(2)}{\iff} A \wedge [(B \wedge C) \vee (\neg C \wedge B) \vee (\neg B \wedge B)] \\
 &\stackrel{(3)}{\iff} A \wedge [(B \wedge C) \vee (\neg C \wedge B)] \\
 &\stackrel{(2)}{\iff} A \wedge [B \wedge (C \vee \neg C)] \\
 &\iff A \wedge B.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Übung):

Es seien A , M_1 , M_2 Mengen. Zeigen Sie:

- (a) $A \times (M_1 \cup M_2) = (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$
 (b) $\text{Pot}(M_1) \cup \text{Pot}(M_2) \subseteq \text{Pot}(M_1 \cup M_2)$
 (c) Gilt in (b) auch die umgekehrte Inklusion? Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

- (a) Beweis: “ \subseteq ”: Sei $x \in A \times (M_1 \cup M_2)$. Dann gilt $x = (a, m)$ mit $a \in A$ und $m \in M_1 \cup M_2$. Falls $m \in M_1$, ist $x \in A \times M_1$ und damit $x \in (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$. Anderenfalls ist $m \in M_2$, also $x \in A \times M_2$ und damit auch $x \in (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$. In jedem Fall gilt $x \in (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$.
 “ \supseteq ”: Sei $x \in (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$. Falls $x \in A \times M_1$, ist $x = (a, m)$ mit $a \in A$ und $m \in M_1$, und damit auch $x = (a, m) \in A \times (M_1 \cup M_2)$. Anderenfalls ist $x \in A \times M_2$ und mit ähnlichem Argument auch $x \in A \times (M_1 \cup M_2)$.

Insgesamt haben wir $A \times (M_1 \cup M_2) \subseteq (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$ und $A \times (M_1 \cup M_2) \supseteq (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$ gezeigt, und damit Gleichheit beider Mengen. \square

- (b) Beweis: Sei $x \in \text{Pot}(M_1) \cup \text{Pot}(M_2)$. Falls $x \in \text{Pot}(M_1)$ gilt, ist $x \subseteq M_1$. Wegen $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$ und Transitivität von \subseteq ist dann auch $x \subseteq M_1 \cup M_2$, also $x \in \text{Pot}(M_1 \cup M_2)$. Anderenfalls ist $x \in \text{Pot}(M_2)$ und aus ähnlichem Grund wieder $x \in \text{Pot}(M_1 \cup M_2)$. \square

- (c) Die umgekehrte Inklusion in (b) gilt nicht immer. Dazu betrachten wir das Gegenbeispiel $M_1 = \{3\}, M_2 = \{4\}$. Dann gelten

$$\text{Pot}(M_1) \cup \text{Pot}(M_2) = \text{Pot}(\{3\}) \cup \text{Pot}(\{4\}) = \{\emptyset, \{3\}\} \cup \{\emptyset, \{4\}\} = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}\}$$

und

$$\text{Pot}(M_1 \cup M_2) = \text{Pot}(\{3, 4\}) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\},$$

was keine Teilmenge der oberen Menge ist.

Aufgabe 3 (Übung):

Seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie für beliebige $M_1, M_2 \subseteq Y$ und $M_3, M_4 \subseteq X$

- (i) $f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2)$,
 (ii) $f(M_3 \cap M_4) \subseteq f(M_3) \cap f(M_4)$,
 (iii) $f(M_3 \cup M_4) = f(M_3) \cup f(M_4)$.

Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass in ((ii)) keine Gleichheit

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

- (i) Für jedes $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M_1 \cap M_2) &\Leftrightarrow f(x) \in M_1 \cap M_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in M_1 \wedge f(x) \in M_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(M_1) \wedge x \in f^{-1}(M_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2) \end{aligned}$$

und somit in der Tat $f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2)$.

- (ii) Für jedes $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} y \in f(M_3 \cap M_4) &\Leftrightarrow \exists x \in M_3 \cap M_4 : f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x_1 \in M_3 : f(x_1) = y \wedge \exists x_2 \in M_4 : f(x_2) = y \\ &\Leftrightarrow y \in f(M_3) \wedge y \in f(M_4) \\ &\Leftrightarrow y \in f(M_3) \cap f(M_4) \end{aligned}$$

und somit in der Tat $f(M_3 \cap M_4) \subseteq f(M_3) \cap f(M_4)$.

Für das geforderte Gegenbeispiel betrachte man $X := Y := \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $M_3 := \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und $M_4 := \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$. Es gilt $M_3 \cap M_4 = \emptyset$, also $f(M_3 \cap M_4) = \emptyset$. Aber $f(M_3) = f(M_4) = \mathbb{R}^+$ und folglich $f(M_3) \cap f(M_4) = \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$.

(iii) Für jedes $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} y \in f(M_3 \cup M_4) &\Leftrightarrow \exists x \in M_3 \cup M_4 : f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x_1 \in M_3 : f(x_1) = y \vee \exists x_2 \in M_4 : f(x_2) = y \\ &\Leftrightarrow y \in f(M_3) \vee y \in f(M_4) \\ &\Leftrightarrow y \in f(M_3) \cup f(M_4) \end{aligned}$$

und somit in der Tat $f(M_3 \cup M_4) = f(M_3) \cup f(M_4)$.

Aufgabe 4 (Tutorium):

- (a) Vereinfachen Sie durch logische Umformungen die Aussage $\neg A \vee (B \wedge A)$.
- (b) Sei M eine Menge von Aussagen. Auf M sei eine Relation \sim gegeben durch $A \sim B :\Leftrightarrow [A \Leftrightarrow B]$. Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf M ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- (a) Es gilt

$$\begin{aligned} \neg A \vee (B \wedge A) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee A) \\ &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge \text{wahr} \\ &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \\ &\Leftrightarrow (A \Rightarrow B). \end{aligned}$$

- (b) Seien $A, B, C \in M$. Es gilt stets $A \Leftrightarrow B$. Gilt $A \Leftrightarrow B$, so gilt auch $B \Leftrightarrow A$. Aus $A \Leftrightarrow B$ und $B \Leftrightarrow C$ folgt außerdem $A \Leftrightarrow C$. Also ist \sim eine Äquivalenzrelation auf M .

(Ausführlicher mit Wahrheitstabeln. Zeigen Sie hierzu, dass die Aussagen $A \Leftrightarrow A$, $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Leftrightarrow A)$, und $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ stets wahr sind.)

Aufgabe 5 (Tutorium):

Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$, sowie $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die folgenden Aussagen:

- (i) Ist f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
- (ii) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch g injektiv.
- (iii) Ist f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
- (iv) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch f surjektiv.
- (v) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.
- (vi) Ist f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.
- (vii) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.
- (viii) Ist $g \circ f$ nicht injektiv, so gilt: f ist nicht injektiv und g ist nicht injektiv.
- (ix) Ist $g \circ f$ nicht surjektiv, so gilt: f ist nicht surjektiv und g ist nicht surjektiv.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

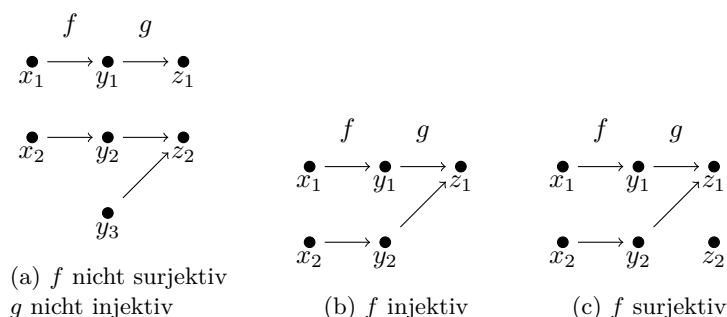


Figure 1: Gegenbeispiele

- (i) Die Aussage ist wahr, denn: Seien $x, y \in X$ beliebig. Zu zeigen ist $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y$. Es gilt in der Tat

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) &\Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\stackrel{g \text{ injektiv}}{\Rightarrow} f(x) = f(y) \\ &\stackrel{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} x = y. \end{aligned}$$

- (ii) Die Aussage ist falsch. Siehe Abbildung 1a: g ist nicht injektiv, denn $g(y_2) = g(y_3) = z_2$. Als Gegenbeispiel dient also z.B. $X = Z = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $f : X \rightarrow Y$ definiert durch $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ und $g : Y \rightarrow Z$ gegeben durch $g(1) = 1$ und $g(2) = g(3) = 2$.
- (iii) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $z \in Z$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists x \in X : (g \circ f)(x) = z$. Da g surjektiv ist, existiert ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Für dieses x gilt in der Tat $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.
- (iv) Die Aussage ist falsch. Siehe Abbildung 1a: f ist nicht surjektiv, denn $y_3 \notin f(X)$. Als Gegenbeispiel dient also z.B. $X = Z = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $f : X \rightarrow Y$ definiert durch $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ und $g : Y \rightarrow Z$ gegeben durch $g(1) = 1$ und $g(2) = g(3) = 2$.
- (v) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $z \in Z$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists y \in Y : g(y) = z$. Da $(g \circ f)$ surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$. Mit der Wahl $y = f(x) \in Y$ gilt tatsächlich $g(y) = z$.
- (vi) Die Aussage ist wahr, denn: Nach (i) ist $(g \circ f)$ injektiv. Nach (iii) ist $(g \circ f)$ surjektiv. Also ist $(g \circ f)$ bijektiv.
- (vii) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $y \in Y$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists x \in X : f(x) = y$. Betrachte dazu $g(y) \in Z$. Da $(g \circ f)$ surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$. Da g injektiv ist, muss aber $f(x) = y$ gelten.
- (viii) Die Aussage ist falsch: Siehe Abbildung 1b: f ist injektiv. Als Gegenbeispiel dient also z.B. $X = Y = \{1, 2\}$, $Z = \{1\}$, $f : X \rightarrow Y$ definiert durch $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ und $g : Y \rightarrow Z$ gegeben durch $g(1) = g(2) = 1$.
- (ix) Die Aussage ist falsch: Siehe Abbildung 1c: f ist surjektiv. Als Gegenbeispiel dient also z.B. $X = Y = Z = \{1, 2\}$, $f : X \rightarrow Y$ definiert durch $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ und $g : Y \rightarrow Z$ gegeben durch $g(1) = g(2) = 1$.

Aufgabe 6 (Tutorium):

Seien A, B und C Mengen. Sind die folgenden Aussagen stets wahr oder (zumindest manchmal) falsch?

- (a) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. (e) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} (C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus (A \times B)$.
- (b) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} A \subsetneq \text{Pot}(A)$. (f) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \emptyset \times A = \emptyset$.
- (c) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} A \in \text{Pot}(A)$. (g) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$.
- (d) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \text{Pot}(A \times B) = \text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B)$. (h) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \{1, 2, 3\} = \{\text{Eins, Zwei, Drei}\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

$\overset{W}{\square} \overset{F}{\blacksquare} C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

Um zu sehen, dass die Aussage falsch ist betrachten wir als Gegenbeispiel die Mengen $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ und $C = \{1, 2\}$. Dann gilt

$$C \setminus (A \cap B) = \{1, 2\} \neq \emptyset = \{1\} \cap \{2\} = (C \setminus A) \cap (C \setminus B).$$

Um zu einer richtigen Aussage zu gelangen, können wir etwa die linke Seite der Gleichung wie folgt umformen. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cap B) &\iff x \in C \wedge x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \in C \wedge [x \notin A \vee x \notin B] \\ &\iff [x \in C \wedge x \notin A] \vee [x \in C \wedge x \notin B] \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass für beliebige Mengen A , B und C die Aussage

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

richtig ist.

$$\square \blacksquare^{\text{W F}} A \subsetneq \text{Pot}(A).$$

Im Fall der leeren Menge \emptyset gilt tatsächlich $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\} = \text{Pot}(\emptyset)$, da die leere Menge in jeder Menge enthalten ist. Wenn die Menge A nichtleer ist, dann ist die Aussage $A \subsetneq \text{Pot}(A)$ falsch.

$$\blacksquare \square^{\text{W F}} A \in \text{Pot}(A).$$

Nach Definition gilt $\text{Pot}(A) = \{M : M \subseteq A\}$. Da die Menge A die Eigenschaft $A \subseteq A$ erfüllt, gilt $A \in \text{Pot}(A)$.

$$\square \blacksquare^{\text{W F}} \text{Pot}(A \times B) = \text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B).$$

Elemente der Menge $\text{Pot}(A \times B)$ sind Teilmengen von $A \times B$. Andererseits sind Elemente der Menge $\text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B)$ Tupel (a, b) mit $a \in \text{Pot}(A), b \in \text{Pot}(B)$, d.h. $a \subseteq A, b \subseteq B$. Elemente von $\text{Pot}(A \times B)$ sind also Mengen von Tupeln, während Elemente von $\text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B)$ Tupel von Mengen sind. Wir erwarten also, dass diese beiden Mengen nie gleich sind.

Das sieht man auch am Beispiel $A = B = \emptyset$. Dann gilt

$$\text{Pot}(A \times B) = \text{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \{(\emptyset, \emptyset)\} = \{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \text{Pot}(\emptyset) \times \text{Pot}(\emptyset) = \text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B).$$

Somit ist die angegebene Aussage falsch.

$$\square \blacksquare^{\text{W F}} (C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus (A \times B).$$

Setze $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ und $C = \{1, 2\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (C \setminus A) \times (C \setminus B) &= \{2\} \times \{1\} \\ &= \{(2, 1)\} \\ &\neq \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \setminus \{(1, 2)\} \\ &= (C \times C) \setminus (A \times B). \end{aligned}$$

Also ist die angegebene Aussage falsch. Wir wollen die linke Seite der Gleichung so umformen, dass wir eine richtige Aussage erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in (C \setminus A) \times (C \setminus B) &\iff x = (y, z) : y \in C \setminus A \wedge z \in C \setminus B \\ &\iff x = (y, z) : [y \in C \wedge y \notin A] \wedge [z \in C \wedge z \notin B] \\ &\iff x \in C \times C \wedge [x \notin A \times C \wedge x \notin C \times B] \\ &\iff x \in (C \times C) \setminus ((A \times C) \cup (C \times B)). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass für beliebige Mengen A , B und C die Gleichung

$$(C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus ((A \times C) \cup (C \times B))$$

richtig ist.

$$\blacksquare \square^{\text{W F}} \emptyset \times A = \emptyset.$$

Nach Definition der Vorlesung gilt

$$\emptyset \times A = \{(x, y) : x \in \emptyset \wedge y \in A\}.$$

Da die Aussage $x \in \emptyset$ für jedes x falsch ist, gibt es kein (x, y) mit $(x, y) \in \emptyset \times A$. Daher folgt $\emptyset \times A = \emptyset$.

$$\blacksquare \square^{\text{W F}} \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}.$$

Wiederholungen von Elementen spielen in der Mengenschreibweise keine Rolle. Das tritt auch natürlicherweise auf, zum Beispiel gilt

$$\{k^2 : k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 2\} = \{4, 1, 0, 1, 4\} = \{0, 1, 4\}.$$

$\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \{1, 2, 3\} = \{\text{Eins}, \text{Zwei}, \text{Drei}\}.$

Um zu entscheiden, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, müssen alle Bestandteile der Aussage präzise definiert sein. Die Frage ist hier, ob man das Wort „Eins“ als natürliche Zahl mit der Bedeutung des Symbols 1 auffassen möchte oder nicht. Wenn man das so macht, dann sind die Mengen sicherlich gleich. Genausogut kann man den Standpunkt vertreten, dass das Wort „Eins“ als Zusammensetzung von Buchstaben und nicht als natürliche Zahl zu verstehen ist. Dann sind die Mengen natürlich nicht gleich. Solche Fragen der Notation müssen geklärt werden, bevor man über den Wahrheitsgehalt von Aussagen entscheiden kann.