Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

Behandelt am 13. November 2025

Aufgabe 1 (Übung):
Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektive Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $g \circ f : X \to Z$ bijektiv ist mit

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X.$$

Aufgabe 2 (Übung):
Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

a) $A = \left\{x^2 - x + 2 \colon\ x \in \mathbb{R}\right\}$,

b) $B = \left\{n + \frac{1}{n} \colon\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Aufgabe 3 (Übung):
Zeigen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(b) Für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

Aufgabe 4 (Übung):

a) Sei $x \geq -1$ mit $x \neq 0$. Zeigen Sie die strikte Bernoulli Ungleichung

$$(1+x)^n > 1 + xn,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Hinweis: Dividieren Sie durch die rechte Seite, formen Sie geschickt um und nutzen Sie Aufgabenteil a).

Aufgabe 5 (Tutorium):
Negieren Sie folgende Aussagen, und entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \geq y\colon x \leq z^2$,

(ii) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \geq y\ \forall x \in \mathbb{R}\colon x \leq z^2$.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Bestimmen Sie jeweils die Menge M aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen gelten.

(i) $|4 - 3x| > 2x + 10$,

(ii) $\left|x^2 - 4\right| \leq x + 2$.

(iii) $|2 - |2 - x|| = 2$.

Aufgabe 7 (Tutorium):
Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

a) $A = \left\{x + \frac{1}{x}\colon\ 0 < x \leq 42\right\}$,

b) $B = \left\{\frac{x^2}{1+x^2}\colon\ x \in \mathbb{R}\right\}$.

Aufgabe 8 (Tutorium):
Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{-2} < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.