Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

Lösungsvorschlag zum 2. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

13. November 2025

Aufgabe 1 (Übung):
Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektive Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $g \circ f : X \to Z$ bijektiv ist mit

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Wir wollen Satz 1.23 aus dem Skript verwenden. (Die Bijektivität von $g \circ f : X \to Z$ folgt jedoch auch schon direkt mit Übungsblatt 1 Aufgabe 5 (i) und (iii)). Sei also zunächst $z \in Z$. Unter Ausnutzung der Assoziativität (siehe Folie 23 im Skript) finden wir

$$\big((g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})\big)(z) = \big(g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}\big)(z) = \big(g \circ \mathrm{id}_X \circ g^{-1}\big)(z) = \big(g \circ g^{-1}\big)(z) = (\mathrm{id}_Z)(z) = z.$$

Andererseits gilt für $x \in X$, dass

$$\big((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)\big)(x) = \big(f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f\big)(x) = \big(f^{-1} \circ \mathrm{id}_Z \circ f\big)(x) = \big(f^{-1} \circ f\big)(x) = (\mathrm{id}_X)(x) = x.$$

Die Aussage folgt nun mit Satz 1.23 des Skriptes.

Aufgabe 2 (Übung):
Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

a) $A = \{x^2 - x + 2 \colon\ x \in \mathbb{R}\}$,

b) $B = \{n + \frac{1}{n} \colon\ n \in \mathbb{N}\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt (quadratische Ergänzung)

$$x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}. \tag{1}$$

Also ist A nach unten durch $\frac{7}{4}$ beschränkt. Einsetzen von $x = \frac{1}{2}$ in (1) zeigt $\frac{7}{4} \in A$. Also ist $\min(A) = \inf(A) = \frac{7}{4}$. Wir zeigen, dass $\sup(A)$ und $\max(A)$ nicht existieren, da A nicht nach oben beschränkt ist. Sei dazu $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $x := \max\{\gamma, 2\}$. Dann gilt

$$A \ni a := x^2 - x + 2 > x^2 - x = x\underbrace{(x-1)}_{\geq 1} \geq x \geq \gamma.$$

Also kann tatsächlich kein $\gamma \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von A sein.

b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt (quadratische Ergänzung)

$$n + \frac{1}{n} = \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 2 \geq 2. \tag{2}$$

Also ist B nach unten durch 2 beschränkt. Einsetzen von $n = 1$ in (2) zeigt $2 \in B$. Also ist $\min(B) = \inf(B) = 2$. Wir zeigen, dass $\sup(B)$ und $\max(B)$ nicht existieren, da B nicht nach oben beschränkt ist. Sei dazu $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Nach dem Satz 2.12 des Skriptes, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \gamma$. Dann gilt

$$B \ni b := n + \frac{1}{n} > n > \gamma.$$

Also kann tatsächlich kein $\gamma \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von B sein.

Aufgabe 3 (Übung):
Zeigen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(b) Für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) *Induktionsanfang (IA):* Für $n = 1$ sehen wir ein, dass die Aussage

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1 \cdot 2^2}{4}$$

richtig ist.
Induktionsvoraussetzung (IV): Es sei nun $n \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig. Wir nehmen an, dass die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

gilt.
Induktionsschluss (IS): Wir berechnen

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

(b) Wir führen einen Beweis durch vollständige Induktion über l.

Induktionsanfang (IA): Für $l = 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

Induktionsvoraussetzung (IV): Wir nehmen an, dass für ein festes aber beliebiges $l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

Induktionsschluss (IS): Nach Lemma 2.24 gilt

$$\binom{k+l+1}{k} + \binom{k+l+1}{k+1} = \binom{k+l+2}{k+1}.$$

Damit gilt für $l+1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{l+1}\binom{k+n}{k} &= \binom{k+l+1}{k}+\sum_{n=0}^{l}\binom{k+n}{k}\\ &\overset{\text{(IV)}}{=} \binom{k+l+1}{k}+\binom{k+l+1}{k+1}=\binom{k+l+2}{k+1}.\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Darstellung.

Aufgabe 4 (Übung):

a) Sei $x \geq -1$ mit $x \neq 0$. Zeigen Sie die strikte Bernoulli Ungleichung

$$(1+x)^n > 1+xn,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Hinweis: Dividieren Sie durch die rechte Seite, formen Sie geschickt um und nutzen Sie Aufgabenteil a).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

a) Sei $x \geq -1$ mit $x \neq 0$. Wir zeigen die Aussage durch vollstänige Induktion, angefangen bei $n=2$.
Indukationsanfang (IA): Für $n=2$ gilt

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $x^2>0$, da $x \neq 0$.
Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $n \geq 2$ fest, aber beliebig. Wir nehmen an, dass

$$(1+x)^n > 1+nx$$

gilt.
Induktionsschluss (IS):
Es gilt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{\text{(IV)}}{>} (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x.$$

Damit gilt die Aussage auch für $n+1$.
Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt nun die Behauptung.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir dividieren die obige Unglichung durch die rechte Seite und zeigen äquivalent, dass

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq 1.$$

Wir rechnen

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{n(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Da $n^2+2n+1>1$ gilt, ist $-\frac{1}{n^2+2n+1}>-1$. Damit können wir die strikte Bernoulli Ungleichung aus Aufgabenteil a) anwenden und erhalten

$$
\begin{aligned}
(3) &\geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{n+1}{n^2+2n+1}\right) \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n^2+n}{n^2+2n+1}\right) \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n(n+1)}{(n+1)^2}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5 (Tutorium):
Negieren Sie folgende Aussagen, und entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \geq y \colon x \leq z^2$,

(ii) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \geq y\ \forall x \in \mathbb{R} \colon x \leq z^2$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(i) Die Negation der Aussage lautet

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \geq y \colon x > z^2.$$

Die ursprüngliche Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \geq y \colon x \leq z^2$$

ist hier wahr. Dazu sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann wählen wir

$$y = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

weiter sei $z \geq y$ beliebig. Dann ist $x \leq z^2$: Für $x < 0$ ist dies klar, denn $z^2 \geq 0 \geq x$. Für $x \geq 0$ gilt dies wegen

$$z^2 = (z+y)(z-y) + y^2 \geq y^2 = x,$$

wobei wir $z + y \geq 0$ und $z - y \geq 0$ verwendet haben.

(ii) Die Negation der Aussage lautet

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \geq y\ \exists x \in \mathbb{R} \colon x > z^2$$

Nun ist die Negation wahr. Dazu sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann wählen wir $z = y$ (sodass $z \geq y$ gilt) und $x = y^2 + 1 = z^2 + 1$ und sehen, dass für diese Wahl $x > z^2$ erfüllt ist.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Bestimmen Sie jeweils die Menge M aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen gelten.

(i) $|4 - 3x| > 2x + 10$,

(ii) $\left|x^2 - 4\right| \leq x + 2$.

(iii) $|2 - |2 - x|| = 2$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $|4 - 3x| = 3\left|\frac{4}{3} - x\right|$. Betrachte die Fallunterscheidung:

- $x \geq \frac{4}{3}$: Es gilt dann $\left|\frac{4}{3} - x\right| = x - \frac{4}{3}$ und damit

$$|4 - 3x| = 3\left|\frac{4}{3} - x\right| > 2x + 10 \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{4}{3}\right) > 2x + 10 \Leftrightarrow x > 14.$$

- $x < \frac{4}{3}$: Es gilt dann $\left|\frac{4}{3} - x\right| = \frac{4}{3} - x$ und damit

$$|4 - 3x| = 3\left|\frac{4}{3} - x\right| > 2x + 10 \Leftrightarrow 3\left(\frac{4}{3} - x\right) > 2x + 10 \Leftrightarrow -\frac{6}{5} > x.$$

Da $\frac{4}{3} < 14$ und $-\frac{6}{5} < \frac{4}{3}$, ist die Lösungsmenge $M = (-\infty, -\frac{6}{5}) \cup (14, \infty)$.

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\left|x^2 - 4\right| \leq x + 2 \Rightarrow x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Ferner ist offenbar $-2 \in M$. Sei also im Weiteren $x > -2$. Dann gilt

$$\left|x^2 - 4\right| = |x-2||x+2| = |x-2|(x+2) \leq x + 2 \Leftrightarrow |x-2| \leq 1,$$

also $x \in [1, 3]$. Damit ist die Lösungsmenge $M = \{-2\} \cup [1, 3]$.

(iii) Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere $y := |2 - x|$. Es gilt

$$|2 - |2 - x|| = |2 - y| = 2 \Leftrightarrow 2 - y \in \{-2, 2\},$$

also $y = 0$ oder $y = 4$. Ist $y = |2 - x| = 0$, so ist $x = 2$. Ist $y = |2 - x| = 4$, so ist $2 - x \in \{4, -4\}$, also $x \in \{-2, 6\}$. Damit lautet die Lösungsmenge $M = \{-2, 2, 6\}$.

Aufgabe 7 (Tutorium):
Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

a) $A = \left\{x + \frac{1}{x}: \; 0 < x \leq 42\right\}$,

b) $B = \left\{\frac{x^2}{1+x^2}: \; x \in \mathbb{R}\right\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

a) Für jedes $0 < x \leq 42$ gilt (quadratische Ergänzung)

$$x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geq 2. \tag{4}$$

Also ist A nach unten durch 2 beschränkt. Einsetzen von $0 < x = 1 \leq 42$ in (4) zeigt $2 \in A$. Also ist $\min(A) = \inf(A) = 2$. Wir zeigen, dass $\sup(A)$ und $\max(A)$ nicht existieren, da A nicht nach oben beschränkt ist. Sei dazu $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $x := \frac{1}{|\gamma|+1}$. Es ist $0 < x \leq 1$ und demnach gilt

$$A \ni a := x + \frac{1}{x} > \frac{1}{x} = 1 + |\gamma| > |\gamma| \geq \gamma.$$

Also kann tatsächlich kein $\gamma \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von A sein.

b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{>0}} < 1. \tag{5}$$

Also ist B nach unten durch 0 und nach oben durch 1 beschränkt. Einsetzen von $x = 0$ in (5) zeigt $0 \in B$. Also ist $\min(B) = \inf(B) = 0$. Wir wollen $\sup(B) = 1$ zeigen und verwenden dafür Satz 2.9 (3) des Skriptes. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $x := \sqrt{\frac{|1-\varepsilon|}{\varepsilon}} + 1$. Es gilt tatsächlich

$$\begin{aligned}
& \tfrac{x^2}{1+x^2} > 1 - \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 > (1-\varepsilon)(1+x^2) = (1-\varepsilon) + x^2(1-\varepsilon) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2(1-(1-\varepsilon)) > (1-\varepsilon) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 = \left(\sqrt{\tfrac{|1-\varepsilon|}{\varepsilon}} + 1\right)^2 > \tfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{wahr.}
\end{aligned}$$

Also ist $\sup(B) = 1$. Da nach (5) $1 \notin B$, existiert $\max(B)$ nicht.

Aufgabe 8 (Tutorium):
Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{-2} < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:

(a) *Induktionsanfang (IA):* Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Induktionsvoraussetzung (IV): Es sei nun $n \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig. Wir nehmen an, dass die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt.
Induktionsschluss (IS): Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

(b) Wenn man versucht, die angegebene Aussage mit vollständiger Induktion zu beweisen, wird man vermutlich nicht direkt zum Ziel kommen. Man kann nämlich aus der Induktionsannahme keine sinnvolle Information für den Induktionsschritt verwenden. Der Trick besteht darin, dass man stattdessen versucht, eine schärfere Ungleichung zu beweisen. Dies scheint zwar im ersten Moment schwieriger zu sein, allerdings führt es hier deshalb zum Ziel, weil man bei einer schärferen Aussage auch im Induktionsschritt eine stärkere Voraussetzung aus der Induktionsannahme verwenden kann. Konkret zeigen wir im Folgenden, dass sogar

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Der Beweis ist nun nicht schwer.

Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ erhalten wir die wahre Aussage $\sum\limits_{k=1}^{1} k^{-2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$.

Induktionsvoraussetzung (IV): Es sei nun $n \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig. Wir nehmen an, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

gilt.
Induktionsschluss (IS): Wir berechnen

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^{-2} = \sum_{k=1}^{n} k^{-2} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{\text{(IV)}}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

gilt.
Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt nun die Behauptung.