

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

Behandelt am 20. November 2025

Aufgabe 1 (Übung):

(a) Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von

(i) $z \cdot w$,

(ii) $\bar{z}^2 + \frac{1}{\bar{w}^2}$.

Hinweis: Der zu berechnende Betrag in der Teilaufgabe (ii) ist keine "schöne" Zahl.

(b) Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^3 + 8$ in Linearfaktoren.

Aufgabe 2 (Übung):

Untersuchen Sie die nachstehend definierten reellen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert.

(i) $(a_n)_{n \geq 2} = \left(\frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2-1} \right)_{n \geq 2}$,

(ii) $(b_n) = \left(\sqrt[n]{2^n + 3^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$,

(iii) $(b_n) = \left(\sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} - 2n \right)_{n \in \mathbb{N}}$,

(iv) $(d_n) = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$,

(v) $(e_n) = \left(\sqrt[n]{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 3 (Übung):

Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

Aufgabe 4 (Übung):

Sei (a_n) eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass (a_n) genau dann konvergiert, wenn (a_{2n}) und (a_{2n+1}) konvergieren und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$ gilt.

Aufgabe 5 (Tutorium):

- (a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 3 - i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von
- (i) z^3 ,
 - (ii) $\frac{1}{z}$.
- (b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die gilt
- (i) $z = |z|$,
 - (ii) $z^2 = |z|^2$.
- (c) Skizzieren Sie die Mengen
- (i) $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$,
 - (ii) $D_1 = \{-z : z \in D_0\}$,
 - (iii) $D_2 = \{iz : z \in D_0\}$,
 - (iv) $D_3 = \{z^2 : z \in D_0\}$,
 - (v) $D_4 = \{z^{-1} : z \in D_0\}$,
 - (vi) $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 - i| < 1 \text{ und } |z - 2 + i| \leq 2\}$,
 - (vii) $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| + |z - i| = \frac{10}{3}\}$.

Aufgabe 6 (Tutorium):

Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert.

- (i) $(a_n) = \left(\frac{6n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 5n^3} \right)_{n \in \mathbb{N}}$,
- (ii) $(c_n)_{n \geq 3} = \left(\sqrt{4n^2 - 9n - \frac{1}{n-3}} - 2n \right)_{n \geq 3}$,
- (iii) $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4i}{15} \right)^n & \text{für gerade } n, \\ \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} & \text{für ungerade } n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$,
- (iv) $(d_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$,
- (v) $(e_n) = \left(\frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, $a > 0$ fest.

Aufgabe 7 (Tutorium):

Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.