

**Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt**  
**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik**  
Wintersemester 2025/26  
20. November 2025

**Aufgabe 1 (Übung):**

- (a) Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen  $z = 3 - i$  und  $w = -1 + 2i$ . Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von
- (i)  $z \cdot w$ ,
  - (ii)  $\bar{z}^2 + \frac{1}{w^2}$ .
- Hinweis:* Der zu berechnende Betrag in der Teilaufgabe (ii) ist keine "schöne" Zahl.
- (b) Zerlegen Sie das Polynom  $p(z) = z^3 + 8$  in Linearfaktoren.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:**

- (a) (i) Es gilt

$$z \cdot w = (3 - i) \cdot (-1 + 2i) = -3 - 2(i)^2 + i(1 + 6) = -1 + 7i$$

und damit

$$\operatorname{Re}(z \cdot w) = -1,$$

$$\operatorname{Im}(z \cdot w) = 7 \text{ und somit}$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 5\sqrt{2}.$$

- (ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 + \frac{1}{w^2} &= (3 + i)^2 + \frac{\bar{w}^2}{|w|^4} = 3^2 + 6i - 1 + \frac{(-1 - 2i)^2}{25} \\ &= 8 + 6i + \frac{1}{25}(1 + 4i - 4) = 8 - \frac{3}{25} + \left(6 + \frac{4}{25}\right)i \end{aligned}$$

und damit

$$\operatorname{Re}\left(\bar{z}^2 + \frac{1}{w^2}\right) = 8 - \frac{3}{25} = \frac{197}{25},$$

$$\operatorname{Im}\left(\bar{z}^2 + \frac{1}{w^2}\right) = 6 + \frac{4}{25} = \frac{154}{25},$$

sowie

$$\begin{aligned} \left|\bar{z}^2 + \frac{1}{w^2}\right| &= \sqrt{\left(\frac{197}{25}\right)^2 + \left(\frac{154}{25}\right)^2} \\ &= \frac{1}{25}\sqrt{38809 + 23716} = \frac{\sqrt{2501}}{5}. \end{aligned}$$

- (b) Es gilt

$$\begin{aligned} z^3 + 8 = 0 &\Leftrightarrow (x + iy)^3 + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + 8 = 0 \wedge 3x^2y - y^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + 8 = 0 \wedge y(3x^2 - y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + 8 = 0 \wedge (y = 0 \vee y = x\sqrt{3} \vee y = -x\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Wir betrachten die einzelnen Fälle.

- Ist  $y = 0$ , so gilt

$$x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

- Ist  $y = x\sqrt{3}$ , so gilt

$$x^3 - 9x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Das gibt die Lösung  $z = 1 + i\sqrt{3}$ .

- Ist  $y = -x\sqrt{3}$ , so gilt

$$x^3 - 9x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Das gibt die Lösung  $z = 1 - i\sqrt{3}$ .

Insgesamt sind also genau  $z_0 = -2$ ,  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$  und  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$  Lösungen der Gleichung  $z^3 + 8 = 0$ .

### Aufgabe 2 (Übung):

Untersuchen Sie die nachstehend definierten reellen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert.

(i)  $(a_n)_{n \geq 2} = \left( \frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2-1} \right)_{n \geq 2}$ ,

(ii)  $(b_n) = \left( \sqrt[n]{2^n + 3^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

(iii)  $(b_n) = \left( \sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} - 2n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

(iv)  $(d_n) = \left( \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

(v)  $(e_n) = \left( \sqrt[n]{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

- (i) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2-1)^2 - (n^3+1)(n+3)}{(n^2-1)(n+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n^2 + 1 - (n^4 + 3n^3 + n + 3)}{(n^2-1)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3 - 2n^2 - n - 2}{(n^2+1)(n+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = -3, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit die Grenzwertsätze (Satz 4.11) verwendet haben.

- (ii) Es gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} \geq \sqrt[n]{3^n} = 3,$$

sowie

$$b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq 3 \sqrt[n]{2}.$$

Wegen  $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$  (Beispiel 4.16 der Vorlesung), gilt nach dem Sandwichtheorem (Satz 4.11 (3))  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ .

(iii) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} - 2n &= \left( \sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} - 2n \right) \\ &= \frac{\sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} + 2n}{\sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} + 2n} \cdot \frac{4n^2 + 8064n + 2016 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} + 2n} \\ &\stackrel{3. \text{ Binom.}}{=} \frac{8064n + 2016}{\sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} + 2n} \\ &= \frac{8064 + \frac{2016}{n}}{2 \left( \sqrt{1 + \frac{8064}{4n} + \frac{2016}{4n^2}} + 1 \right)} \end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 4.11) und dieser Darstellung folgt nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} - 2n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8064 + \frac{2016}{n}}{2 \left( \sqrt{1 + \frac{8064}{4n} + \frac{2016}{4n^2}} + 1 \right)} = \frac{8064}{2 \cdot 2} = 2016.$$

(iv) Für jedes  $n \geq 2$  gilt

$$\begin{aligned} d_n &= \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n = \left( \frac{n-1}{n} \right)^n = \left( \frac{n}{n-1} \right)^{-n} = \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^{-n} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^{-1} \cdot \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^{1-n} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1}} \end{aligned}$$

Der Zähler konvergiert mit Mitteln der Vorlesung gegen 1. Der Nenner konvergiert nach Kapitel 4 des Skriptes gegen die Eulersche Zahl (Vg. Definition 4.19). Mit den Grenzwertsätzen folgt also  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \frac{1}{e}$ .

(v) Konvergente Folgen sind beschränkt (Satz 4.10 (2)). Wir zeigen, dass  $(d_n)$  unbeschränkt ist und damit nicht konvergent sein kann. Sei dazu  $k \in \mathbb{N}$ . Es ist

$$(2k)! = \underbrace{2k \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot (k+1)}_{k \text{ Faktoren, jeder } \geq k} \cdot \underbrace{k \cdot \dots \cdot 1}_{\geq 1} \geq k^k.$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt damit

$$d_{2n^2} = \frac{1}{\sqrt{(2n^2)!}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n^2)n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2n^2}} = \frac{1}{n}.$$

Da die natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt sind (Satz 2.12 (2)), ist  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in der Tat nicht nach oben beschränkt.

### Aufgabe 3 (Übung):

Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge  $(a_n)$  auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

Angenommen,  $(a_n)$  ist konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}$ . Induktiv sieht man ein, dass  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nach Satz 4.11 (2) des Skriptes gilt also  $a \geq 0$ . Ferner gilt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} = \frac{2 + 4a}{4 + 3a}.$$

Auflösen nach  $a$  liefert

$$4a + 3a^2 = 2 + 4a \Leftrightarrow a^2 = \frac{2}{3} \stackrel{a \geq 0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Also ist  $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$  der einzige Kandidat für den Grenzwert. Wegen  $a_1 = 1 > a$ , liegt die Vermutung nahe, dass  $(a_n)$  monoton fallend ist. Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} - a_n \stackrel{a_n \geq 0}{\leq} 0 \Leftrightarrow 2 + 4a_n \leq 4a_n + 3a_n^2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq a_n^2 \stackrel{a_n \geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\frac{2}{3}} \leq a_n.$$

Also ist  $(a_n)$  monoton fallend, falls  $a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die letzte Aussage beweisen wir durch vollständige Induktion über  $n$ .

- *Induktionsanfang (IA):* ( $n = 1$ ) In der Tat ist  $a_1 = 1 \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ .
- *Induktionsvoraussetzung (IV):* Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest aber beliebig. Es gelte  $a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ .
- *Induktionsschritt (IS):* ( $n \rightsquigarrow n + 1$ ) Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Für dieses  $n$  gelte die IV  $a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Dann gilt für  $n + 1$  tatsächlich

$$\begin{aligned} a_{n+1} \geq \sqrt{\frac{2}{3}} &\stackrel{a_{n+1} \geq 0}{\Leftrightarrow} a_{n+1}^2 = \left(\frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n}\right)^2 \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(2 + 4a_n)^2 \geq 2(4 + 3a_n)^2 \\ &\Leftrightarrow 12 + 48a_n + 48a_n^2 \geq 32 + 48a_n + 18a_n^2 \Leftrightarrow 30a_n^2 \geq 20 \stackrel{a_n \geq 0}{\Leftrightarrow} a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \text{(IV)}. \end{aligned}$$

Also ist  $(a_n)$  nach unten beschränkt und monoton fallend. Nach dem Monotoniekriterium (Satz 4.13) ist  $(a_n)$  konvergent. Nach Obigem ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

#### Aufgabe 4 (Übung):

Sei  $(a_n)$  eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass  $(a_n)$  genau dann konvergiert, wenn  $(a_{2n})$  und  $(a_{2n+1})$  konvergieren und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$  gilt.

#### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- $\Rightarrow$ : Sei  $(a_n)$  konvergent gegen  $a \in \mathbb{C}$ . Zu zeigen ist, dass  $a_{2n} \rightarrow a$  und  $a_{2n+1} \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ . Sei dazu  $\varepsilon > 0$  vorgelegt. Da  $a_n \rightarrow a$ , existiert ein  $n_0(\varepsilon)$  so, dass  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0(\varepsilon)$ . Wegen  $2k + 1 > 2k > k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , gilt erst recht  $|a_{2n} - a| < \varepsilon$  und  $|a_{2n+1} - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0(\varepsilon)$ . Dies beweist die Konvergenz von  $(a_{2n})$  und  $(a_{2n+1})$  gegen  $a$ .
- $\Leftarrow$ : Seien  $(a_{2n})$  und  $(a_{2n+1})$  konvergent gegen ein  $a \in \mathbb{C}$ . Zu zeigen ist, dass  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert. Sei dazu ein  $\varepsilon > 0$  vorgelegt. Da  $a_{2n+1} \rightarrow a$  und  $a_{2n} \rightarrow a$ , existieren  $n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  derart, dass

$$\forall n \geq n_1(\varepsilon) : |a_{2n+1} - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \forall n \geq n_2(\varepsilon) : |a_{2n} - a| < \varepsilon$$

Definiere  $n_0(\varepsilon) := \max\{2n_1(\varepsilon) + 1, 2n_2(\varepsilon)\}$ . Für alle  $n \geq n_0(\varepsilon)$  gilt  $|a_n - a| < \varepsilon$ , denn: Ist  $n > n_0(\varepsilon)$  ungerade, also  $n = 2k + 1$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ , so gilt

$$n = 2k + 1 \geq n_0(\varepsilon) \geq 2n_1(\varepsilon) + 1 \Rightarrow k \geq n_1(\varepsilon).$$

Ist  $n$  gerade, also  $n = 2k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$n = 2k \geq n_0(\varepsilon) \geq 2n_2(\varepsilon) \Rightarrow k \geq n_2(\varepsilon).$$

In beiden Fällen gilt nach Voraussetzung  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

### Aufgabe 5 (Tutorium):

- (a) Gegeben sei die komplexe Zahl  $z = 3 - i$ . Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von
- (i)  $z^3$ ,
  - (ii)  $\frac{1}{z}$ .
- (b) Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$  für die gilt
- (i)  $z = |z|$ ,
  - (ii)  $z^2 = |z|^2$ .
- (c) Skizzieren Sie die Mengen
- (i)  $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$ ,
  - (ii)  $D_1 = \{-z : z \in D_0\}$ ,
  - (iii)  $D_2 = \{iz : z \in D_0\}$ ,
  - (iv)  $D_3 = \{z^2 : z \in D_0\}$ ,
  - (v)  $D_4 = \{z^{-1} : z \in D_0\}$ ,
  - (vi)  $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 - i| < 1 \text{ und } |z - 2 + i| \leq 2\}$ ,
  - (vii)  $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| + |z - i| = \frac{10}{3}\}$ .

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

- (a) Wir berechnen vorbereitend:

$$|z| = |3 - i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

und

$$|w| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

- (i) Es gilt

$$z^3 = (3 - i)^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 i + 3 \cdot 3(i)^2 - (i)^3 = 18 - 26i$$

und damit

$$\operatorname{Re}(z^3) = 18,$$

$$\operatorname{Im}(z^3) = -26,$$

$$|z^3| = |z|^3 = 10\sqrt{10}.$$

- (ii) Es gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{10}(3 + i)$$

und damit

$$\operatorname{Re}(z^{-1}) = \frac{3}{10},$$

$$\operatorname{Im}(z^{-1}) = \frac{1}{10},$$

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

- (b) Für  $z \in \mathbb{C}$  setzen wir  $x = \operatorname{Re} z$  und  $y = \operatorname{Im} z$ . Es gelten die folgenden Äquivalenzen

$$z = |z| \iff x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}$$

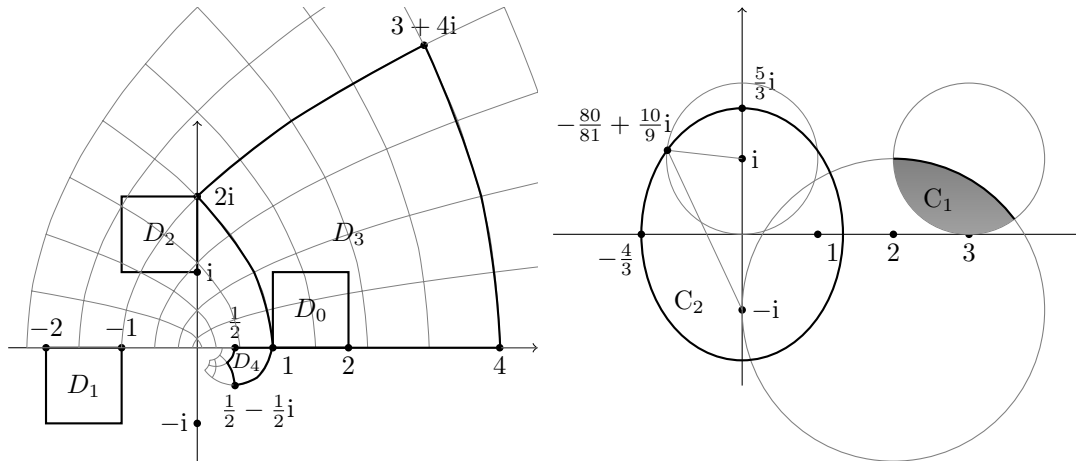
$$\iff x = \sqrt{x^2} \wedge y = 0$$

$$\iff z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

und

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 &\iff x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2 \\ &\iff xy = 0 \wedge x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \\ &\iff y = 0 \\ &\iff z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Skizze der Mengen  $D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, C_1$  und  $C_2$ .



### Aufgabe 6 (Tutorium):

Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert.

- (i)  $(a_n) = \left( \frac{6n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 5n^3} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ,
- (ii)  $(c_n)_{n \geq 3} = \left( \sqrt{4n^2 - 9n - \frac{1}{n-3}} - 2n \right)_{n \geq 3}$ ,
- (iii)  $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \left( \frac{3+4i}{15} \right)^n & \text{für gerade } n, \\ \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} & \text{für ungerade } n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$ ,
- (iv)  $(d_n) = \left( \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ,
- (v)  $(e_n) = \left( \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $a > 0$  fest.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) Mit den Grenzwertsätzen (Satz 4.11) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 5n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3}}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} + 5} = 0.$$

(ii) Für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  gilt

$$\begin{aligned} c_n = \sqrt{4n^2 - 9n - \frac{1}{n-3}} - 2n &= \left( \sqrt{4n^2 - 9n - \frac{1}{n-3}} - 2n \right) \cdot \frac{\sqrt{4n^2 - 9n - \frac{1}{n-3}} + 2n}{\sqrt{4n^2 - 9n - \frac{1}{n-3}} + 2n} \\ &= \frac{-9n - \frac{1}{n-3}}{\sqrt{4n^2 - 9n - \frac{1}{n-3}} + 2n} = \frac{-9 - \frac{1}{n(n-3)}}{\sqrt{4 - \frac{9}{n} - \frac{1}{n^2}} + 2}. \end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 4.11) und dieser Darstellung folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{-9-0}{\sqrt{4-0-0}+2} = -\frac{9}{4}$ .

- (iii) Betrachte die Teilfolgen  $(c_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ , sowie  $(c_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  und wollen Satz 4.23 (3) anwenden (Aufgabe 4 auf diesem Übungsblatt). Es gilt  $\left| \frac{3+4i}{15} \right| = \frac{\sqrt{9+16}}{15} = \frac{\sqrt{25}}{15} = \frac{1}{3}$  und damit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{3+4i}{15} \right)^{2k} = 0$ . Hieraus folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \left( \frac{3+4i}{15} \right)^{2k} = \frac{1}{2}.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(2k+1) + \sqrt{2k+1}} - \sqrt{2k+1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(2k+1) + \sqrt{2k+1}} - \sqrt{2k+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{(2k+1) + \sqrt{2k+1}} + \sqrt{2k+1}}{\sqrt{(2k+1) + \sqrt{2k+1}} + \sqrt{2k+1}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{(2k+1) + \sqrt{2k+1}} + \sqrt{2k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2k+1}}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.23 (3) folgt nun, dass  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\frac{1}{2}$  konvergiert.

- (iv) Nach der Vorlesung wissen wir, dass  $(\tilde{d}_n) := \left( \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \right)$  gegen die Eulersche Zahl konvergiert. Insbesondere ist  $(\tilde{d}_n)$  beschränkt, etwa  $\tilde{d}_n \leq 4$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$1 \leq d_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \sqrt[3]{4}$$

Wegen  $\sqrt[3]{4} \rightarrow 1$  (Beispiel 4.16), gilt nach dem Sandwichtheorem (Satz 4.11 (3))  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1$ .

- (v) Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle und benutzen jeweils die Ergebnisse des Kapitels 4 des Skriptes.

- Ist  $a > 1$ , so gilt  $\frac{1}{a} < 1$  und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{2n} = 0$ . Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{-2n}}{1 + a^{-2n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{2n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \left(\frac{1}{a}\right)^{2n}} = 1.$$

- Ist  $a = 1$ , so gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \frac{0}{2} = 0$$

und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$ .

- Ist  $a < 1$ , so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2n} = 0$ . Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2n} - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2n} + 1} = -1.$$

### Aufgabe 7 (Tutorium):

Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge  $(a_n)$  auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

Angenommen,  $(a_n)$  ist konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}$ . Induktiv sieht man ein, dass  $a_n \geq \sqrt{2} \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nach Satz 4.11 (2) des Skriptes gilt also  $a \geq 0$ . Ferner gilt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{2 + a}.$$

Auflösen nach  $a$  liefert

$$a^2 = |2 + a| \stackrel{a \geq 0}{\Leftrightarrow} a^2 = 2 + a \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \right\} = \{-1, 2\}.$$

Wegen  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , ist  $a = 2$  der einzige Kandidat für den Grenzwert. Wegen  $a_1 = \sqrt{2} < 2$  liegt die Vermutung nahe, dass  $(a_n)$  monoton wachsend ist. Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2 + a_n} - a_n = \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow a_n^2 - a_n - 2 &= \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 - \frac{1}{4} \leq 0 \\
 \Leftrightarrow \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 &\leq \frac{9}{4} \\
 \stackrel{a_n \geq \sqrt{2} > \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} a_n &\leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.
 \end{aligned}$$

Also ist  $(a_n)$  monoton wachsend, falls  $a_n \leq 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die letzte Aussage beweisen wir durch vollständige Induktion über  $n$ .

- *Induktionsanfang (IA):* ( $n = 1$ ) In der Tat ist  $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$ .
- *Induktionsvoraussetzung (IV):* Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest aber beliebig. Es gelte  $a_n \leq 2$ .
- *Induktionsanfang (IA):* ( $n \rightsquigarrow n + 1$ ) Wir finden für  $n + 1$  tatsächlich

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \stackrel{(IV)}{\leq} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Also ist  $(a_n)$  nach oben beschränkt und monoton wachsend. Nach dem Satz dem Monotoniekriterium (Satz 4.12) ist  $(a_n)$  konvergent. Weiter gilt nach Obigem  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .