Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

Behandelt am 27. November 2025

Aufgabe 1 (Übung):
Bestimmen Sie jeweils die Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

(a) $a_n = (-1 + \frac{1}{2}(-1)^{n+1})^{n+1}$,

(b) $a_n = (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}$,

(c) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2, & n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \end{cases}$

(d) $a_n = i^n + (-1)^n$, verwenden Sie hier $\liminf\limits_{n\to\infty} |a_n|$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|$.

Aufgabe 2 (Übung):
Die Folge (a_n) sei durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für gerade } n, \\ \frac{1}{2^n} & \text{für ungerade } n, \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

(a) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergent ist.

(c) Warum ist das Leibniz-Kriterium hier nicht anwendbar?

Aufgabe 3 (Übung):
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{5^{k+1}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$,

(d) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^m}{m}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$.

Aufgabe 4 (Tutorium):
Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie anhand der Definition, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0(\varepsilon)$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$.

Aufgabe 5 (Tutorium):
Seien M_1, M_2 zwei abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass dann auch $M_1 \times M_2$ abzählbar ist.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Seien M_1, M_2 zwei abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass dann auch $M_1 \cup M_2$ abzählbar ist.