

Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
 Wintersemester 2025/26
 27. November 2025

Aufgabe 1 (Übung):

 Bestimmen Sie jeweils die Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(a) $a_n = (-1 + \frac{1}{2}(-1)^{n+1})^{n+1}$,

(b) $a_n = (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}$,

(c) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2, & n = 3k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & n = 3k - 2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \end{cases}$

(d) $a_n = i^n + (-1)^n$, verwenden Sie hier $\liminf_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

 (a) Wir betrachten die zwei Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}) . Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{2k} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{2k+1} = -\left(\frac{3}{2}\right)^{2k+1} \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}.$$

 Wir erhalten die nach unten unbeschränkte Folge (a_{2k}) mit $a_{2k} \rightarrow -\infty$ für $k \rightarrow \infty$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = 0$. Da diese beiden Teilfolgen die komplette Folge abdecken, gilt

$$H(a_n) = \{-\infty, 0\}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

 (b) Wir betrachten die zwei Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}) . Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{2k} = \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{2k-1} = \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^{-2}$$

und

$$a_{2k+1} = -\left(\frac{2k+3}{2k+2}\right)^{2k} = -\left(1 + \frac{1}{2k+2}\right)^{2k+2} \left(1 + \frac{1}{2k+2}\right)^{-2}.$$

 Wir erhalten $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = e$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = -e$. Da diese beiden Teilfolgen die komplette Folge abdecken, gilt

$$H(a_n) = \{-e, e\}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = e \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -e.$$

 (c) Wir betrachten die drei Teilfolgen (a_{3k}) , (a_{3k-1}) und (a_{3k-2}) . Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{3k} = 1 + \frac{1}{8^k}, \quad a_{3k-1} = 2, \quad \text{und} \quad a_{3k-2} = 2 + \frac{(3k-2)+1}{3k-2} = 3 + \frac{1}{3k-2}.$$

Somit gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k-1} = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k-2} = 3.$$

Da die drei Teilfolgen die komplette Folge abdecken, erhalten wir

$$H(a_n) = \{1, 2, 3\}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

(d) Wir betrachten die vier Teilfolgen (a_{4k}) , (a_{4k+1}) , (a_{4k+2}) und (a_{4k+3}) . Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{4k} &= i^{4k} + (-1)^{4k} = 1 + 1 = 2, \\ a_{4k+1} &= i^{4k+1} + (-1)^{4k+1} = i - 1, \\ a_{4k+2} &= i^{4k+2} + (-1)^{4k+2} = -1 + 1 = 0, \\ a_{4k+3} &= i^{4k+3} + (-1)^{4k+3} = -i - 1. \end{aligned}$$

Es gilt

$$|i - 1| = \sqrt{2}, \quad |-i - 1| = \sqrt{2}.$$

Folglich oszilliert die Folge a_n zwischen den Werten

$$a_n \in \{2, i - 1, 0, -i - 1\}.$$

Damit sind die Häufungswerte der Folge

$$H(a_n) = \{2, i - 1, 0, -i - 1\},$$

und es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 2, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

Aufgabe 2 (Übung):

Die Folge (a_n) sei durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für gerade } n, \\ \frac{1}{2^n} & \text{für ungerade } n, \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

- Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.
- Warum ist das Leibniz-Kriterium hier nicht anwendbar?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Es gilt

$$a_{2k} = \frac{1}{2k} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty.$$

Nach Aufgabe 4 (Übung) von Blatt 3 gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = 0.$$

□

(b) Angenommen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert. Bezeichne etwa $a := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ den Reihenwert. Für die $2N$ -te Partialsumme gilt

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{2k+1} a_{2k+1} + \sum_{k=1}^N (-1)^{2k} a_{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^{2k}}$$

und folglich

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{4^k} + 2 \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n a_n = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}.$$

Mit der geometrischen Reihe ist dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Nach Annahme ist $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent. Dann ist also auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergent (gegen $\frac{4}{3} + 2a$). Aber nach Beispiel 5.3 des Skriptes ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent (harmonische Reihe). Also muss die Annahme verworfen werden — $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist divergent. □

(c) Die Folge (a_n) ist nicht monoton fallend. Wegen $2^{2k} \geq 1 + 2k > k + 1$ ist

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}} < \frac{1}{2k+2} = a_{2k+2}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (Übung):

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

- (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{5^{k+1}}$, (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$,
 (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$, (d) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^m}{m} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)$,
 (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

- (a) Behauptung: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{5^{k+1}}$ konvergiert und hat den Wert $\frac{3}{4}$.

Beweis: Wir schreiben

$$\frac{3}{5^{k+1}} = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^k.$$

Dies ist eine geometrische Reihe mit Quotienten $q = \frac{1}{5}$. Die N -te Partialsumme lautet

$$S_N = \frac{3}{5} \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{3}{5} \cdot \frac{1 - (1/5)^{N+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{N+1}\right).$$

Da $(1/5)^{N+1} \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$ folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{5^{k+1}} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{3}{4}.$$

□

- (b) Behauptung: Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ konvergiert und hat den Wert 1.

Beweis: Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Die N -te Partialsumme ist daher

$$S_N = \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{N}.$$

Somit gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1.$$

□

- (c) Behauptung: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut.

Beweis: Wir definieren die Folge (a_n) durch $a_n := (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen zunächst die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums. Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist alternierend, und es gilt

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(n+1)(n+1)^2}{n(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+4n^2+4n}} \leq \sqrt{\frac{n^3+3n^2+3n+n}{n^3+4n^2+4n}} \\ &= \sqrt{\frac{n^3+3n^2+4n}{n^3+4n^2+4n}} \leq \sqrt{1} = 1, \end{aligned}$$

also $|a_{n+1}| \leq |a_n|$. Somit ist $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniz-Kriterium ist daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n|$ konvergent.

Wir zeigen nun, dass die Reihe nicht absolut konvergiert. Schreibe dazu,

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n}{n+1}.$$

Da $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$, gilt für alle $n \geq 1$, dass $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$. Daher haben wir für alle $n \geq 1$ nun

$$(1) \quad |a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Aus Beispiel 5.12 (1) wissen wir, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert. Wegen der Ungleichung (1) und dem Minorantenkriterium folgt nun also, dass auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergiert und die Reihe nicht absolut konvergent ist. \square

(d) Behauptung: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ konvergiert.

Beweis: Setze

$$a_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^2 - 1}{n^3} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}.$$

Offenbar gilt $a_n > 0$ und $a_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Setze nun $z = i$. Dann gilt

$$|z| = |i| = 1 \quad \text{und} \quad z \neq 1.$$

Da (a_n) eine fallende Nullfolge ist, sind die Voraussetzungen des Abelkriteriums erfüllt. Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

\square

(e) Behauptung: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$ divergiert.

Beweis: Wir zeigen, dass $(-1)^n \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$ keine Nullfolge bildet. Nach Vorlesung kann die Reihe in diesem Fall nicht konvergieren. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\left| (-1)^n \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \geq \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Aufgabe 4 (Tutorium):

Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (a) Zeigen Sie anhand der Definition 4.2 für Konvergenz, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.
- (b) Geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0(\varepsilon)$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- (a) *Behauptung:* Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a = 2$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen

$$|a_n - a| = \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| = 2 \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = 2 \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n+1$$

gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$. □

- (b) Nach Obigem gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Also gilt $\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < 10^{-10}$ ab $n_0 = 2 \cdot 10^{10}$.

Aufgabe 5 (Tutorium):

Seien M_1, M_2 zwei abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass dann auch $M_1 \times M_2$ abzählbar ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

Die Tatsache, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, folgt mit dem Vorgehen, mit dem in der Vorlesung gezeigt wurde, dass \mathbb{Q} abzählbar ist. Anstatt eine natürliche Zahl im Zähler und eine im Nenner stehen zu haben, stehen sie nun als Paar nebeneinander. Können wir nun eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $M_1 \times M_2$ finden, dann können wir die beiden Abbildungen verknüpfen um eine surjektive Abbildung von \mathbb{N} nach $M_1 \times M_2$ zu erhalten. Diese ist wieder surjektiv. Da M_1 und M_2 abzählbar sind, existieren surjektive Abbildungen $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow M_1$ und $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow M_2$. Definiere dann

$$(2) \quad g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow M_1 \times M_2, \quad (m, n) \mapsto (f_1(m), f_2(n)).$$

Diese Abbildung bildet tatsächlich von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $M_1 \times M_2$ ab und ist surjektiv, da wir $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ einfach (m, n) so wählen, dass $f_1(m) = m_1$ und $f_2(n) = m_2$ gilt, womit $g(m, n) = (m_1, m_2)$ gilt. Möglich ist dieses Finden von m und n wegen der Surjektivität von f_1 und f_2 . □

Aufgabe 6 (Tutorium):

Seien M_1, M_2 zwei abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass dann auch $M_1 \cup M_2$ abzählbar ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

Da M_1 und M_2 abzählbar sind, existieren surjektive Abbildungen

$$f_1 : \mathbb{N} \rightarrow M_1, \quad f_2 : \mathbb{N} \rightarrow M_2.$$

Wir können nun eine Abbildung $g : \mathbb{N} \rightarrow M_1 \cup M_2$ definieren, indem wir abwechselnd Elemente aus M_1 und M_2 nehmen:

$$g(n) := \begin{cases} f_1\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ gerade,} \\ f_2\left(\frac{n+1}{2}\right), & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Jedes Element aus $M_1 \cup M_2$ erscheint in dieser Sequenz mindestens einmal, da f_1 und f_2 surjektiv sind. Damit ist g surjektiv von \mathbb{N} nach $M_1 \cup M_2$, und somit ist $M_1 \cup M_2$ abzählbar. □