

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26
Behandelt am 4. Dezember 2025

Aufgabe 1 (Übung):

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

- | | |
|---|--|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n}$, | d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$, |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, | e) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$, |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \sqrt[n]{a})$ mit $0 < a < 1$, | f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} \right]$. |

Hinweise: Definieren Sie für b) zunächst eine geeignete Folge und zeigen Sie zusätzlich, dass die Folge $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ gegen $\frac{1}{e}$ konvergiert. Benutzen Sie für c) die dritte binomische Formel $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (Übung):

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Reihenwert.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$,
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}}$.

Aufgabe 3 (Übung):

Ein Ball wird aus einer endlichen Anfangshöhe $h > 0$ fallen gelassen. Nach jedem Aufprall erreicht er nur noch einen konstanten Bruchteil $0 < \alpha < 1$ der anfänglichen Höhe. Zeigen Sie, dass die gesamte vertikale Strecke S , die der Ball bis zum Stillstand zurücklegt endlich ist und berechnen Sie diese explizit in Abhängigkeit von h und α .

Aufgabe 4 (Übung):

- a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

konvergiert, aber die durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

divergiert.

- b) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt der konvergenten Reihe aus a) mit sich selbst divergiert.

Aufgabe 5 (Tutorium):

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen?

a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) z^n$$

b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$$

Aufgabe 6 (Tutorium):

Untersuchen Sie die folgenden Reihen jeweils auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} \text{ mit } x \in \mathbb{R},$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!},$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2},$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2 + \sqrt{n^4+1}},$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n},$$

f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n}.$$

Aufgabe 7 (Tutorium):

Ein Teilchen führt eine gedämpfte Schwingung aus. In jedem ganzzahligen Zeitschritt $n \geq 2$ wird ein Teil der mechanischen Energie durch Reibung an die Umgebung abgegeben. Der im Zeitintervall $[n, n+1]$ verlorene Energiebetrag sei modelliert durch $E_n = E_0 \frac{n^2}{2^n}$, wobei $E_0 > 0$ eine Konstante ist. Stellen Sie eine Reihe auf, welche die insgesamt abgegebene Energie beschreibt und untersuchen Sie diese auf Konvergenz.