Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

4. Dezember 2025

Aufgabe 1 (Übung):
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ mit $0<a<1$,

d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$,

e) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+4}{n^2-3n+1}$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right]$.

Hinweise: Definieren Sie für b) zunächst eine geeignete Folge und zeigen Sie zusätzlich, dass die Folge $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ gegen $\frac{1}{e}$ konvergiert. Benutzen Sie für c) die dritte binomische Formel $a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k$ für alle $a,b\in\mathbb{R}$ und alle $n\in\mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

a) Sei $n\in\mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|(-1)^n\binom{2n}{n}\right| &= \binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(2n-n)!n!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{\prod_{j=1}^{2n}j}{\left(\prod_{j=1}^{n}j\right)^2}=\frac{\prod_{j=n+1}^{2n}j}{\prod_{j=1}^{n}j}\\ &\overset{\text{Indexshift}}{=}\frac{\prod_{j=1}^{n}(n+j)}{\prod_{j=1}^{n}j}=\prod_{j=1}^{n}\frac{n+j}{j}=\prod_{j=1}^{n}\underbrace{\left(1+\frac{n}{j}\right)}_{\geq 2}\geq 2^n.\end{aligned}$$

Wegen $(2^n)\to\infty$, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}:=\left((-1)^n\binom{2n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Nach Satz 5.4 (3) des Skriptes ist dies aber eine notwendige Bedingung dafür, dass $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergiert. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergent.

b) Wir zeigen zunächst $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\to\frac{1}{e}$. Sei $n\in\mathbb{N}$ und setze $m=n-1$. Dann haben wir

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\frac{n-1}{n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}\cdot\frac{m}{m+1}.$$

Lassen wir n gegen unendlich laufen, dann auch $m\to\infty$. Somit haben wir $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\to e$ und $\frac{m}{m+1}\to 1$ für $m\to\infty$. Folglich findet man

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}\cdot\frac{m}{m+1}\to\frac{1}{e}\cdot 1=\frac{1}{e}\text{ für }m\to\infty.$$

Wir definieren nun eine geeignete Folge b_n und finden

$$\begin{aligned}b_n &:= \sqrt[n]{\left|\frac{n}{n+1}\right|^{n^2}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)^n\\ &= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Wegen $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to \frac{1}{e}$ und $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \to 1$ für $n \to \infty$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e} < 1.$$

Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent.

c) Für $0 < a < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \sqrt[n]{a} < 1$ und $0 < \sqrt[n+1]{a} < 1$. Deshalb gilt

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n+1]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+1}} = \sqrt[n+1]{a\sqrt[n]{a}} < \sqrt[n+1]{a \cdot 1} = \sqrt[n+1]{a}.$$

Folglich ist $(1-\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton fallend. Ferner ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Nach dem Leibniz-Kriterium ist die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ konvergent. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha-\beta)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{n-1-k}\cdot\beta^k. \tag{1}$$

Einsetzen von $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt[n]{a}$ und Umstellen nach $\alpha - \beta$ liefert

$$\left|(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})\right| = 1-\sqrt[n]{a} = \frac{1-a}{\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k}_{\le 1}} \ge \frac{1-a}{\sum_{k=0}^{n-1}1} = (1-a)\cdot\frac{1}{n}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-a}{n} = (1-a)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergent ist, liefert das Minorantenkriterium zusammen mit der obigen Abschätzung, dass $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ *nicht* absolut konvergent ist.

d) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$. Offenbar ist $a_n > 0$ und es gilt

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = (n+1)\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}.$$

Wegen $\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ folgt mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$ (absolut) konvergent ist.

e) Für alle $n \ge 3$ gilt

$$a_n := \frac{n+4}{n^2-3n+1} = \frac{n+4}{\underbrace{n(n-3)+1}_{>0}} \ge \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \ge 0$$

und die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist nach der Vorlesung divergent. Folglich ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^2-3n+1}$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

f) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|(-1)^n\left[\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right]\right| = \left|\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right| = \left|\frac{(n+2)-(n+3)}{(n+3)(n+2)}\right| = \frac{1}{(n+3)(n+2)} \le \frac{1}{n^2}$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist konvergent nach Vorlesung. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right]$ ist nach dem Majorantenkriterium folglich auch absolut konvergent.

Aufgabe 2 (Übung):
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Reihenwert.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^{n+k}}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) Sei $N \in \mathbb{N}$. Für die N-te Partialsumme S_N der Reihe gilt

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}\right] = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)!} \\ &\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n!} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} 1 - \frac{1}{(N+1)!}. \end{aligned}$$

Folglich ist die Reihe konvergent und es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{N\to\infty} S_N = 1$.

(ii) Sei $N \in \mathbb{N}$. Für die N-te Partialsumme S_N der Reihe gilt

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n-k}} \cdot \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n-k}} \cdot \frac{1}{4^k} \\ &\overset{\text{Binom.}}{=} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{3}{4}\right)^n = -1 + \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist die N-te Partialsumme der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ mit $0 < z = \frac{3}{4} < 1$. Nach Beispiel (1) aus Abschnitt 7.1 des Skriptes ist der Reihenwert der geometrischen Reihe in diesem Fall $\frac{1}{1-z} = 4$. Also ist die vorliegende Reihe konvergent und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}} = \lim_{N\to\infty} S_N = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3$.

Aufgabe 3 (Übung):
Ein Ball wird aus einer endlichen Anfangshöhe $h > 0$ fallen gelassen. Nach jedem Aufprall erreicht er nur noch einen konstanten Bruchteil $0 < \alpha < 1$ der anfänglichen Höhe. Zeigen Sie, dass die gesamte vertikale Strecke S, die der Ball bis zum Stillstand zurücklegt endlich ist und berechnen Sie diese explizit in Abhängigkeit von h und α.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Die Strecke setzt sich zusammen aus dem anfänglichen Fallweg h, sowie der darauf folgenden Auf- und Abbewegungen nach jedem Aufkommen auf den Boden. Demnach lässt sich die gesamte Strecke S als

$$S = h + 2\sum_{n=1}^{\infty} h\alpha^n = h + 2h\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n$$

schreiben. Da $0 < \alpha < 1$ handelt es sich bei der Reihe um eine geometrische Reihe, also $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Damit ist die Gesamtstrecke offensichtlich endlich und man erhält

$$S = h + \frac{2h\alpha}{1-\alpha} = h\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Aufgabe 4 (Übung):

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

konvergiert, aber die durch Umordnung entstehende Reihe

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots$$

divergiert.

b) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt der konvergenten Reihe aus a) mit sich selbst divergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

a) Die Reihe

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Für die umgeordnete Reihe gilt

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right). \quad (2)$$

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\geq\frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\geq 0.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, ist $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ eine divergente Minorante für die Reihe in (2).

b) Die konvergente Reihe aus a) kann mittels einer Indexverschiebung als

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

geschrieben werden. Sei nun $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ für $n\in\mathbb{N}_0$. Für das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ mit sich selbst gilt

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}a_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}}.$$

Mit

$$0\leq(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{a}\sqrt{b}\leq\frac{1}{2}(a+b)$$

für $a,b>0$ folgt

$$\begin{aligned}|c_n|&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}}\geq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\frac{1}{2}(n-k+1+k+1)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n+2}\\&=\frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n}1=\frac{2(n+1)}{n+2}=\frac{2+2/n}{1+2/n}\to 2\quad\text{for}\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Demnach ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und damit $\sum_{n=0}^{\infty}$ divergent.

Aufgabe 5 (Tutorium):
Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

a) Setze $a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$ für jedes $n \geq 2$. Es gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2n+3}{n^2} \frac{(n-1)^2}{2n+1} |x| = \frac{(2+\frac{3}{n})(1-\frac{1}{n})^2}{2+\frac{1}{n}} |x|$$

für jedes $n \geq 2$. Wir erhalten $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe absolut für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Wir müssen nun noch die Punkte $x = -1$ und $x = 1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} (-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn es gilt

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}$$

für jedes $n \geq 2$. Die zweite Reihe hingegen divergiert nach dem Minorantenkriterium, da $a_n \geq {}^{2n}/_{n^2} = {}^{2}/_{n}$ für jedes $n \geq 2$ gilt. Insgesamt konvergiert die Reihe konvergiert genau dann, wenn $x \in [-1, 1)$ gilt.

b) Wir setzen $a_n = \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{e}^{1+(-1)^n} x^2$$

Die Folge auf der rechten Seite hat die Häufungswerte x^2 und $\mathrm{e}^2 x^2$, also ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{e}^2 x^2.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe absolut für $|x| < \mathrm{e}^{-1}$, und die Reihe divergiert für $|x| > \mathrm{e}^{-1}$.

Für die übrigen beiden Punkte $x = -\mathrm{e}^{-1}$ und $x = \mathrm{e}^{-1}$ haben wir

$$a_n = \mathrm{e}^{-1+(-1)^n}, \quad \text{also} \quad a_{2n} = 1.$$

Für diese x ist (a_n) keine Nullfolge und damit die Reihe divergent. Insgesamt konvergiert die Reihe genau dann, wenn $x \in (-\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1})$ gilt.

c) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ gilt also

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z|,$$

d.h. die Reihe konvergiert absolut für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d.h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0.

Konvergenz der Reihe liegt also genau für $|z| < 1$ vor.

d) Wir setzen $a_n := \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|z+3\mathrm{i}|}{(\sqrt[n]{n})^2} = |z+3\mathrm{i}|$$

Also konvergiert die Reihe für $|z+3\mathrm{i}| < 1$ und sie divergiert für $|z+3\mathrm{i}| > 1$. Für z mit $|z+3\mathrm{i}| = 1$ gilt außerdem

$$|a_n| = \frac{1}{n^2} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

sodass die Reihe nach Beispiel 5.11 (1) auch für $|z+3\mathrm{i}| = 1$ absolut konvergiert. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3\mathrm{i}| \leq 1$.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Untersuchen Sie die folgenden Reihen jeweils auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ mit $x \in \mathbb{R}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}}{n}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

a) Natürlich ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ absolut konvergent für $x = 0$. Sei also im Folgenden $x \neq 0$. Dann ist $y := x^2 > 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{y^n}{1+y^{2n}} = \frac{1}{y^{-n}+y^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n + y^n}.$$

Ist $y = 1$, so gilt

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n + y^n} = \frac{1}{1^n+1^n} = \frac{1}{2}$$

und folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Nach Satz 5.4 (3) des Skriptes ist dies aber eine notwendige Bedingung dafür, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ divergent für $x \in \{-1, 1\}$.
Ist $y \neq 1$, so ist $y < 1$ oder $\frac{1}{y} < 1$. O.B.d.A. sei $y < 1$. Dann gilt

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n + y^n} < \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n} = y^n.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$ mit dem Parameter $|y| = y < 1$ ist konvergent. Weil $|a_n| < y^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ausfällt, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergent nach dem Majorantenkriterium.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_n := \sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\right|} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

und folglich ist

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ (absolut) konvergent.

c) Sei $a_n := i^n/n$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nicht absolut, da

$$|a_n| = \left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sei $n = 2k$ für $k \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$a_{2k} = \frac{i^2 k}{2k} = \frac{(-1)^k}{2k}.$$

Sei nun $n = 2k+1$ für $k \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$a_{2k+1} = \frac{i^{2k+1}}{2k+1} = i\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Deshalb gilt also nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Da beide Folgen $(\frac{1}{2k})$ und $(\frac{1}{2k+1})$ monoton fallende Nullfolgen sind, konvergieren beide Reihen nach dem Leibnitzkriterium und per Definition auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

d) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$. Offenbar ist $a_n > 0$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2(n+1))!}{(3(n+1))^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{(3n)^n n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(3n)^n}{(3(n+1))^{n+1}} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{(3n)^n}{(3(n+1))^{n+1}} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{1}{3n} \cdot \frac{(3n)^{n+1}}{(3(n+1))^{n+1}} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{4}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4}{3} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{=\frac{1}{e}} = \frac{4}{3e}.$$

Da $e > 2$ ist $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{2}{3} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$ (absolut) konvergent ist.

e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2 + \sqrt{n^4+1}} = \frac{n(1-\frac{2}{\sqrt{n}})^2}{n^2 + n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = \frac{(1-\frac{2}{\sqrt{n}})^2}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right)}.$$

Für die Klammer im Nenner gilt $1 + \sqrt{1+\frac{1}{n^4}} \leq 1 + \sqrt{2} < 3$. Für den Zähler gilt ab $n \geq 9$

$$\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) = \frac{2}{3}.$$

Deshalb folgt $a_n \geq \frac{2}{9}\frac{1}{n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent also ist folglich auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

f) Wir zeigen vorbereitend, dass
$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$$
für alle $n \geq 3$. Sei dazu $n \geq 3$ beliebig. Es gilt
$$\begin{aligned}\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n} \quad &\Leftrightarrow \quad n > \left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^n = \sqrt[n+1]{(n+1)^n} \\ &\Leftrightarrow \quad n^{n+1} > (n+1)^n \\ &\Leftrightarrow \quad n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$
Nach Definition 4.19 des Skriptes ist $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e < 3$ und $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Damit gilt tatsächlich
$$n \geq 3 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
für alle $n \geq 3$.

Die Reihenglieder $a_n = \frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n}$ sind nach Obigem ab $n = 3$ positiv. Da es bei Konvergenzfragen auf endlich viele Reihenglieder nicht ankommt, ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn sie absolut konvergent ist bzw. wenn $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ konvergent ist.

Für die N-te Partialsumme S_N der letzten Reihe gilt
$$\begin{aligned}S_N \quad &= \quad \sum_{n=3}^{N}\frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n} = \sum_{n=3}^{N}\frac{\sqrt[n]{n}}{n} - \sum_{n=3}^{N}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{n} \leq \sum_{n=3}^{N}\frac{\sqrt[n]{n}}{n} - \sum_{n=3}^{N}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{n+1} \\ &\overset{\text{Indexshift}}{=} \quad \sum_{n=3}^{N}\frac{\sqrt[n]{n}}{n} - \sum_{n=4}^{N+1}\frac{\sqrt[n]{n}}{n} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{\sqrt[3]{3}}{3} - \frac{\sqrt[N+1]{N+1}}{N+1} \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{3}.\end{aligned}$$
Also ist (S_N) nach oben beschränkt. Nach Satz 5.4 (1) des Skriptes ist $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ konvergent. Also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n}$ (absolut) konvergent.

Aufgabe 7 (Tutorium):
Ein Teilchen führt eine gedämpfte Schwingung aus. In jedem ganzzahligen Zeitschritt $n \geq 2$ wird ein Teil der mechanischen Energie durch Reibung an die Umgebung abgegeben. Der im Zeitintervall $[n, n+1]$ verlorene Energiebetrag sei modelliert durch $E_n = E_0\frac{n^2}{2^n}$, wobei $E_0 > 0$ eine Konstante ist. Stellen Sie eine Reihe auf, welche die insgesamt abgegebene Energie beschreibt und untersuchen Sie diese auf Konvergenz.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:
Die insgesamt abgegebene Energie ist gegeben durch
$$E_{\text{ges}} = \sum_{n=2}^{\infty} E_n = E_0\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$
Wir betrachten die Folge $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Konvergenz lässt sich mittels dem Wurzelkriterium überprüfen (alternativ auch mit dem Quotientenkriterium), wir haben
$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/n}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$
da $\lim_{n\to\infty} n^{2/n} = 1$ nach Beispiel 4.16 in der Vorlesung. Die Reihe konvergiert also nach dem Wurzelkriterium und die vom System insgesamt abgegebene Energie ist endlich.