Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

Behandelt am 11. Dezember 2025

Aufgabe 1 (Übung):
Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums W.

a) Geben Sie ein Beispiel für U_1, U_2 und W, sodass $U_1 \cup U_2$ kein Untervektorraum ist, wobei

$$U_1 \cup U_2 = \{v \in W \mid v \in U_1 \text{ oder } v \in U_2\}.$$

b) Sei $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von W. Zeigen Sie, dass dann $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

c) Zeigen Sie, dass

$$U_1 \cap U_2 = \{v \in W \mid v \in U_1 \text{ und } v \in U_2\}$$

ein Untervektorraum von W ist.

Aufgabe 2 (Übung):
In den folgenden Teilaufgaben betrachten wir verschiedene Abbildungen zwischen den Räumen

$$c = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x_n \text{ ist konvergent}\}, \qquad c_0 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\},$$

$$\ell^1 = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\right\}, \qquad \ell^\infty = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\}.$$

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Wohldefiniertheit und prüfen Sie ob die Abbildungen linear sind:

a) Grenzwertabbildung $\phi : c \to \mathbb{R},\ \phi((x_n)) := \lim_{n\to\infty} x_n$,

b) Rechtsverschiebung $\phi : c \to c$ mit $\phi((x_n)) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$,

c) Abbildung $\phi : \ell^\infty \to \ell^\infty$ mit $\phi((x_n)) := (x_1, 2x_3, 3x_3, \dots)$.

Aufgabe 3 (Übung):
Es sei

$$U := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists c \geq 0\, \forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq c|x|\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}},$$

wobei $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ die Menge aller Abbildungen ist, welche die reellen Zahlen auf die reellen Zahlen abbildet.

Hinweis: Mit Beispiel 6.6 aus der Vorlesung ist bereits gezeigt, dass $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ein Vektorraum ist

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) U ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

b) Elemente f aus U sind stetig in 0.

c) Die Funktion $f(x) := x \cdot g(x)$ liegt in U, wobei

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{1}$$

die sogenannte *Dirichlet-Funktion* ist.

Aufgabe 4 (Übung):

a) Zeige Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ exisitert so, dass $q_n \to x$ für $n \to \infty$.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 2.22 (2) aus der Vorlesung für diese Aufgabe.

b) Zeigen Sie, dass die Dirichlet-Funktion (1) an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ unstetig ist.

Aufgabe 5 (Tutorium):
Sei W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass dann für alle $x \in W$ gilt $-x = (-1) \cdot x$.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. des $\mathbb{R}^{[-1,1]}$?

(a) $\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\}$,

(b) $\{(a_n) \in c \mid \lim_{n\to\infty} a_n = a\}$ mit einem festen $a \in \mathbb{R}$,

(c) $\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f(0) = 0\}$.

Aufgabe 7 (Tutorium):
Seien U_1, U_2 Untervektorräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums W. Zeigen Sie, dass die folgende Menge

$$\{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$$

ein Untervektorraum von W ist.

Aufgabe 8 (Tutorium):
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen wie in Aufgabe 3 der Übung auf Wohldefiniertheit und prüfen Sie ob die Abbildungen linear sind:

a) Partialsummenoperator $\phi : \ell^1 \to \ell^\infty,\ \phi((x_n)) := \left(\sum_{k=1}^{1} x_k,\ \sum_{k=1}^{2} x_k,\ \sum_{k=1}^{3} x_k,\ \ldots\right)$,

b) Differenzenoperator $\phi : c_0 \to c_0,\ \phi((x_n)) := (x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ x_4 - x_3,\ \ldots)$,

c) Supremumsabbildung $\phi : \ell^\infty \to \mathbb{R},\ \phi((x_n))) := \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$,

d) Multiplikationsoperator $\phi : \ell^\infty \to \ell^\infty,\ \phi((x_n)) := (a_1x_1,\ a_2x_2,\ a_3x_3,\ \ldots)$, wobei (a_n) eine feste Folge ist. Für welche (a_n) ist ϕ wohldefiniert? Ist ϕ dann linear?

Aufgabe 9 (Tutorium):
Bestimmen Sie eine Konstante y_0 so, dass die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$D = [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}, \\ y_0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

auf ihrem ganzen Definitionsbereich D stetig ist.