

Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
Wintersemester 2025/26
11. Dezember 2025

Aufgabe 1 (Übung):

Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines \mathbb{K} -Vektorraums W .

- a) Geben Sie ein Beispiel für U_1, U_2 und W , sodass $U_1 \cup U_2$ kein Untervektorraum ist, wobei

$$U_1 \cup U_2 = \{v \in W \mid v \in U_1 \text{ oder } v \in U_2\}.$$

- b) Sei $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von W . Zeigen Sie, dass dann $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

- c) Zeigen Sie, dass

$$U_1 \cap U_2 = \{v \in W \mid v \in U_1 \text{ und } v \in U_2\}$$

ein Untervektorraum von W ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

- a) Beispiel 6.11 aus der Vorlesung.

- b) Wir beweisen die Behauptung mit einem Widerspruch. Angenommen es existieren $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ und $u_2 \in U_2 \setminus U_1$. Da $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum ist folgt mit Satz 6.9 aus der Vorlesung $u_1 + u_2 \in U_1 \cup U_2$ und somit $u_1 + u_2 \in U_1$ oder $u_1 + u_2 \in U_2$. Da U_1 und U_2 Untervektorräume sind folgt $u_2 \in U_1$ oder $u_1 \in U_2$ was ein Widerspruch ist. Damit ist $U_1 \setminus U_2 = \emptyset$ oder $U_2 \setminus U_1 = \emptyset$. \square

- c) Wir beweisen die Behauptung mit Satz 6.9 aus der Vorlesung. Es gilt $0 \in U_1 \cap U_2$ und damit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Seien $u, v \in U_1 \cap U_2$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Für $i \in \{1, 2\}$ gilt dann $u, v \in U_i$. Da U_i ein Untervektorraum ist folgt $u + v \in U_i$ und $\alpha u \in U_i$. Damit folgt $u + v \in U_1 \cap U_2$ und $\alpha u \in U_1 \cap U_2$. \square

Aufgabe 2 (Übung):

In den folgenden Teilaufgaben betrachten wir verschiedene Abbildungen zwischen den Räumen

$$c = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x_n \text{ ist konvergent}\}, \quad c_0 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\},$$

$$\ell^1 = \left\{ (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}, \quad \ell^{\infty} = \left\{ (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Wohldefiniiertheit und prüfen Sie ob die Abbildungen linear sind:

- a) Grenzwertabbildung $\phi : c \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi((x_n)) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$,
 b) Rechtsverschiebung $\phi : c \rightarrow c$ mit $\phi((x_n)) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$,
 c) Abbildung $\phi : \ell^{\infty} \rightarrow \ell^{\infty}$ mit $\phi((x_n)) := (x_1, 2x_3, 3x_3, \dots)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Da $(x_n) \in c$ konvergent ist, existiert $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Somit ist ϕ wohldefiniert.

Seien $(x_n), (y_n) \in c$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\phi((\alpha x_n + \beta y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha x_n + \beta y_n] = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha \phi((x_n)) + \beta \phi((y_n)).$$

Also ist ϕ linear.

(b) Sei $(x_n) \in c$ mit $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Die verschobene Folge ist

$$\phi((x_n)) = (\phi((x_n))_1, \phi((x_n))_2, \phi((x_n))_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

und für $n \geq 2$ gilt $\phi((x_n))_n = x_{n-1}$. Da $x_{n-1} \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$, folgt $\phi((x_n))_n \rightarrow x_0$. Insbesondere konvergiert $\phi((x_n))$ und $\phi((x_n)) \in c$. Daher ist ϕ eine wohldefinierte Abbildung. Zeigen wir nun die Linearität von ϕ . Dazu seien $(x_n), (y_n) \in c$ zwei konvergente Folgen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann gilt komponentenweise

$$\begin{aligned} \phi(\alpha x_n + \beta y_n) &= (0, \alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots) \\ &= \alpha(0, x_1, x_2, \dots) + \beta(0, y_1, y_2, \dots) \\ &= \alpha \phi((x_n)) + \beta \phi((y_n)). \end{aligned}$$

Also ist ϕ linear.

(c) Wir zeigen, dass die Abbildung nicht wohldefiniert ist und damit auch keine lineare Abbildung sein kann. Betrachte dazu die konstante Folge (x_n) mit $x_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = 1$. Damit ist $(x_n) \in \ell^\infty$. Für die Bildfolge gilt $|\phi((x_n))_n| = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was ein unbeschränkter Ausdruck ist für $n \rightarrow \infty$. Also ist die Bildfolge nicht beschränkt und demnach nicht in ℓ^∞ enthalten.

Aufgabe 3 (Übung):

Es sei

$$U := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists c \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq c|x|\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}},$$

wobei $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ die Menge aller Abbildungen ist, welche die reellen Zahlen auf die reellen Zahlen abbildet.

Hinweis: Mit Beispiel 6.6 aus der Vorlesung ist bereits gezeigt, dass $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ein Vektorraum ist

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- U ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Elemente f aus U sind stetig in 0.
- Die Funktion $f(x) := x \cdot g(x)$ liegt in U , wobei

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (1)$$

die sogenannte *Dirichlet-Funktion* ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Wir müssen zeigen, dass 0 in U enthalten ist und U abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation ist.

Wir zeigen zunächst, dass $0 \in U$. Sei dazu $f \equiv 0$, dann existiert $c = 0$ so, dass $|f| = |0| \leq 0 \cdot |x| = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $0 \in U$.

Um die Abgeschlossenheit unter Addition zu zeigen, seien $f, g \in U$. Dann existieren Konstanten $c_1, c_2 \geq 0$ mit $|f(x)| \leq c_1|x|$ und $|g(x)| \leq c_2|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$|(f + g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq c_1|x| + c_2|x| = c|x|,$$

wobei $c := c_1 + c_2$. Also ist $f + g \in U$ mit Konstante $c \geq 0$.

Abschließen zeigen wir nun noch die Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation. Sei $f \in U$ mit $\tilde{c} \geq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \cdot \tilde{c}|x| = c|x|,$$

mit $c := \lambda \tilde{c}$. Also ist $\lambda f \in U$ mit $c \geq 0$. □

- (b) Sei $f \in U$, dann existiert ein $c \geq 0$ mit $|f(x)| \leq c|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x_0 = 0$ folgt $|f(0)| \leq c \cdot 0 = 0$ und damit $f(0) = 0$. Sei weiterhin $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge, d.h. $x_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$|f(x_n) - f(0)| = |f(x_n)| \leq c|x_n| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Folglich ist f nach Definition 7.1 stetig in 0. □

- (c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|g(x)| \leq 1$. Daher haben wir

$$|f(x)| = |x \cdot g(x)| = |x| \cdot |g(x)| \leq 1 \cdot |x|.$$

Also existiert eine Konstante $c = 1$, sodass $|f(x)| \leq c|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Tatsächlich existieren unendlich viele solcher Konstanten $c \geq 1 > 0$. Somit liegt f in U . □

Aufgabe 4 (Übung):

- a) Zeige Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{Q} existiert so, dass $q_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 2.22 (2) aus der Vorlesung für diese Aufgabe.

- b) Zeigen Sie, dass die Dirichlet-Funktion (1) an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ unstetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- a) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das offene Intervall $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$. Da $x \pm \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ und $x - \frac{1}{n} < x + \frac{1}{n}$, können wir Satz 2.22 (2) anwenden. Demnach existiert ein $q_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$x - \frac{1}{n} < q_n < x + \frac{1}{n}.$$

Damit gilt $|q_n - x| < \frac{1}{n}$, und weil $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, folgt $q_n \rightarrow x$. Da $q_n \in \mathbb{Q}$, haben wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Folge (q_n) in \mathbb{Q} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$ konstruiert. □

- b) Wir zeigen, dass g weder auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, noch auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist. Sei zunächst $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere $x_n := x + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Wegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ und $g(x_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \neq 1 = g(x)$. Folglich ist g nicht stetig in x nach Definition 7.1 aus der Vorlesung. Da $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ beliebig war, ist g nicht stetig auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Sei nun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Aus Aufgabenteil a) wissen wir, dass eine Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $q_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ existiert. Dann gilt $g(q_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0 = g(x)$. Also ist g nach Definition 7.1 nicht stetig in x . Da $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

Aufgabe 5 (Tutorium):

Sei W ein \mathbb{K} -Vektorraum. Zeigen Sie, dass dann für alle $x \in W$ gilt $-x = (-1) \cdot x$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

Sei $x \in W$, dann gilt

$$0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x.$$

Da $0 \cdot x = 0$ der Nullvektor ist, folgt $x + (-1) \cdot x = 0$ und damit ist $(-1) \cdot x$ das additive Inverse von x . \square

Aufgabe 6 (Tutorium):

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. des $\mathbb{R}^{[-1,1]}$?

- (a) $\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\}$,
- (b) $\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a\}$ mit einem festen $a \in \mathbb{R}$,
- (c) $\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f(0) = 0\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

a) Wir bezeichnen im folgenden die zu betrachtende Menge als U . Seien $f, g \in \mathbb{R}^{[-1,1]}$ definiert durch $f(x) = 1 + x$ und $g(x) = -x$ für alle $x \in [-1, 1]$. Wegen $f(-1) = g(0) = 0$, ist $f, g \in U$. Aber $f + g \equiv 1$, d.h. für alle $x \in [-1, 1]$ gilt $(f + g)(x) = 1 \neq 0$ und damit $f + g \notin U$. Nach Satz 6.9 der Vorlesung ist U also kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$.

b) Wir bezeichnen die zu betrachtende Menge wieder mit U und nutzen Satz 6.9 aus der Vorlesung um zu zeigen, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Wir zeigen zunächst, dass $0 \in U$. Wegen $0 = (a_n)$ mit $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ist $0 \in U$ genau dann, wenn $a = 0$. Im Folgenden sei also $a = 0$.

Seien nun $(a_n), (b_n) \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 + 0 = 0 = a$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \cdot 0 = 0 = a$$

sind $(a_n) + (b_n) \in U$ und $\alpha(a_n) \in U$. Also ist U genau für $a = 0$ ein Untervektorraum für $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

c) Sei wieder U die zu betrachtende Menge. Wieder verwenden wir Satz 6.9 aus der Vorlesung um zu zeigen, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$. Wegen $0 = f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ und damit $f(0) = 0$, ist $0 \in U$. Seien nun $f, g \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wegen

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$$

und

$$(\alpha f)(0) = \alpha f(0) = \alpha \cdot 0 = 0$$

ist U also in der Tat ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$.

Aufgabe 7 (Tutorium):

Seien U_1, U_2 Untervektorräume des \mathbb{K} -Vektorraums W . Zeigen Sie, dass die folgende Menge

$$\{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$$

ein Untervektorraum von W ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

Wir schreiben $A := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$. Da $0 \in U_1, U_2$ folgt $0 \in A$. Seien $u, v \in A$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, dann existieren $u_1, v_1 \in U_1$ und $u_2, v_2 \in U_2$ so, dass $u = u_1 + u_2$ und $v = v_1 + v_2$. Mit Satz 6.9 aus der Vorlesung folgt $u_1 + v_1 \in U_1$, $u_2 + v_2 \in U_2$, $\alpha u_1 \in U_1$ und $\alpha u_2 \in U_2$. Damit folgt $u + v = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 \in A$ und $\alpha u = \alpha u_1 + \alpha u_2 \in A$.

Aufgabe 8 (Tutorium):

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen wie in Aufgabe 3 der Übung auf Wohldefiniertheit und prüfen Sie ob die Abbildungen linear sind:

- a) Partialsummenoperator $\phi : \ell^1 \rightarrow \ell^\infty$, $\phi((x_n)) := (\sum_{k=1}^1 x_k, \sum_{k=1}^2 x_k, \sum_{k=1}^3 x_k, \dots)$,
 b) Differenzenoperator $\phi : c_0 \rightarrow c_0$, $\phi((x_n)) := (x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \dots)$,
 c) Supremumsabbildung $\phi : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi((x_n)) := \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$,
 d) Multiplikationsoperator $\phi : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$, $\phi((x_n)) := (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \dots)$, wobei (a_n) eine feste Folge ist. Für welche (a_n) ist ϕ wohldefiniert? Ist ϕ dann linear?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:

- a) Sei $(x_n) \in \ell^1$, dann ist $\sum_{k=1}^\infty |x_k| < \infty$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt für den n -ten Eintrag der Folge $\phi((x_n))$

$$|\phi((x_n))_n| = \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sum_{k=1}^\infty |x_k| < \infty.$$

Inbesondere ist also auch $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\phi((x_n))_n| < \infty$ und damit liegt $\phi((x_n))$ in ℓ^∞ . Für $(x_n), (y_n) \in \ell^1$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt komponentenweise

$$\phi((\alpha x_n + \beta y_n))_n = \sum_{k=1}^n [\alpha x_k + \beta y_k] = \alpha \sum_{k=1}^n x_k + \beta \sum_{k=1}^n y_k = \alpha \phi((x_n)) + \beta \phi((y_n)).$$

Somit ist ϕ sowohl wohldefiniert als auch linear.

- b) Sei $(x_n) \in c_0$, dann gilt $x_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Folglich gilt auch $x_{n+1} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und wir haben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x_{n+1} - x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 - 0 = 0.$$

Also liegt $\phi((x_n))$ in c_0 und ist damit wohldefiniert. Seien nun $(x_n), (y_n) \in c_0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\phi((\alpha x_n + \beta y_n)) = [\alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1}] - [\alpha x_n + \beta y_n] = \alpha [x_{n+1} - x_n] + \beta [y_{n+1} - y_n] = \alpha \phi((x_n)) + \beta \phi((y_n)).$$

Damit ist ϕ auch linear.

- c) Für $(x_n) \in \ell^\infty$ ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty$, also insbesondere $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$, weshalb ϕ wohldefiniert ist.

Allerdings ist ϕ im allgemeinen nicht linear. Wir geben dazu ein Gegenbeispiel an: Sei $(x_n) = (1, 0, 0, \dots)$ und $y = (0, 1, 0, 0, \dots)$. Dann ist $\phi((x_n)) = 1$ und $\phi((y_n)) = 1$, aber $(x_n) + (y_n) = (1, 1, 0, 0, \dots)$ und $\phi((x_n + y_n)) = 1 \neq 2 = \phi((x_n)) + \phi((y_n))$. Also scheitert hier die Additivität.

- d) Damit ϕ wohldefiniert ist, müssen wir fordern, dass $(a_n) \in \ell^\infty$. Ist $(a_n) \in \ell^\infty$, dann existiert eine Konstante $A > 0$ so, dass $\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = A < \infty$. Da $(x_n) \in \ell^\infty$ ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = C < \infty$ für $C > 0$. Dann gilt $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\phi((x_n))_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n \leq A \cdot C < \infty$ und damit $\phi((x_n)) \in \ell^\infty$. Also ist ϕ wohldefiniert. Ist (a_n) hingegen kein Element von ℓ^∞ , dann existiert eine divergente Teilfolge a_{n_k} , d.h. $|a_{n_k}| \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$. Wähle $(x_n) \in \ell^\infty$ mit $x_{n_k} = 1$ und $x_n = 0$ sonst, dann sind die Komponenten $a_{n_k} x_{n_k}$ von $\phi((x_n))$ unbeschränkt und $\phi \notin \ell^\infty$.

Wir zeigen nun, dass ϕ linear ist. Wie oben argumentiert sei nun $(a_n) \in \ell^\infty$ und es seien $(x_n), (y_n) \in \ell^\infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\phi((\alpha x_n + \beta y_n))_n = a_n [\alpha x_n + \beta y_n] = a_n \alpha x_n + a_n \beta y_n = \alpha a_n x_n + \beta a_n y_n = \alpha \phi((x_n)) + \beta \phi((y_n)).$$

Aufgabe 9 (Tutorium):

Bestimmen Sie eine Konstante y_0 so, dass die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$D = [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}, \\ y_0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

auf ihrem ganzen Definitionsbereich D stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9:

Offensichtlich ist die Funktion f in allen $x \in D \setminus \{1\}$ stetig, daher reicht es $f(1) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{1\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \cdot \left(1 + \frac{3}{x^2-4}\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x^2-4) + 3}{x^2-4} \\ &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2-4)} = \frac{x+1}{x^2-4}. \end{aligned}$$

Folglich muss $y_0 := \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-4} = -\frac{2}{3}$ gewählt werden.