Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

Behandelt am 18. Dezember 2025

Aufgabe 1 (Übung):
Untersuchen Sie

(a) die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ mit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g_n(x) = e^{-n(1+x+x^2)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,

(c) die Funktionenfolge (h_n) mit $h_n : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ und $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \leq a < 1$ fest ist,

(d) die Funktionenfolge (h_n) mit $h_n : [a, 1] \to \mathbb{R}$ $h_n(x) = \sqrt[n]{n^2x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \leq a < 1$ fest ist,

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen die Funktion f stetig ist:

(a) $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\}, \\ \dfrac{1}{2} & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{für } x = 3, \end{cases}$$

(b) $$f : [-7, 3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\ x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3], \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1). \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie bei (b), dass $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ gilt.

Aufgabe 3 (Übung):
Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a, b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

Aufgabe 4 (Übung):
Sei $a > 0$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$,

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{x}$.

Hinweis: Verwenden Sie bei (c) Ihre Lösung aus Teil (b).

Aufgabe 5 (Tutorium):
Untersuchen Sie

(a) die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^5 x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ mit $g_n : (-1,1] \to \mathbb{R}$ und $g_n(x) = x^n(1-x)$ für alle $x \in (-1,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$,

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Bestimmen Sie jeweils eine Konstante y_0 so, dass die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich D stetig ist.

(a) $D = (0,\infty),\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) & \text{für } x \in D \setminus \{2\}, \\ y_0 & \text{für } x = 2. \end{cases}$

(b) $D = [-1,1],\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} & \text{für } x \in D \setminus \{0\}, \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 7 (Tutorium):
Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$, (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x}$.

Aufgabe 8 (Tutorium):
Berechnen Sie, falls existent, die Grenzwerte der folgenden Funktionen mittels Potenzreihenentwicklung:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - \cos(x) - 2x}{x^2}$,

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^2) - 1 + \frac{x^4}{2}}{x^8}$.