Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

18. Dezember 2025

Aufgabe 1 (Übung):
Untersuchen Sie

(a) die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ mit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g_n(x) = e^{-n(1+x+x^2)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,

(c) die Funktionenfolge (h_n) mit $h_n : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ und $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \le a < 1$ fest ist,

(d) die Funktionenfolge (h_n) mit $h_n : [a, 1] \to \mathbb{R}$ $h_n(x) = \sqrt[n]{n^2x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \le a < 1$ fest ist,

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Für $x = 0$ ist $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ist $x \neq 0$, so gilt

$$|f_n(x)| = \left|\frac{nx^2}{1+n^2x^4}\right| = \frac{nx^2}{1+n^2x^4} \le \frac{nx^2}{n^2x^4} = \frac{1}{nx^2} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Also ist $f_n \to 0$ punktweise für $n \to \infty$.

Sei $\tilde{f}(y) = \frac{y}{1+y^2}$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wir beobachten, dass $f_n(x) = \tilde{f}(nx^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt. Definiere $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{nx^2}{1+n^2x^4} \ge \frac{nx_n^2}{1+n^2x_n^4} = \tilde{f}(1) = \frac{1}{2}.$$

Also $\|f_n\|_\infty \not\to 0$, die Konvergenz $f_n \to 0$ ist also nicht gleichmäßig.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}.$$

Da die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(\sqrt[4]{e})^3}\right)^n$$

konvergent ist und wegen

$$|g_n(x)| = e^{-n(1+x+x^2)} \le e^{-\frac{3n}{4}} = \left(\frac{1}{(\sqrt[4]{e})^3}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

ist die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ gleichmäßig konvergent nach (b) in Satz 7.26 (Kriterium von Weierstraß) des Skriptes.

(c) Sei zunächst $0 < a < 1$. Dann gilt für alle $x \in [a, \infty)$

$$|h_n(x)| = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na} \leq \frac{1}{na} =: \alpha_n \to 0$$

für $n \to \infty$. Nach (a) in Satz 7.26 des Skriptes ist die Funktionenfolge h_n gleichmäßig konvergent gegen die Nullfunktion.

Sei nun $a = 0$. Für $x = 0$ gilt $h_n(x) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$. Für $x \neq 0$ ist

$$h_n(x) = \frac{1}{1+nx} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Deshalb konvergiert $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen h, wobei

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Weil h nicht stetig bei 0 ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein (vgl. Satz 7.28).

(d) Sei zunächst $0 < a < 1$ und $x \in [a, 1]$ fest. Dann gilt

$$h_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

Also ist $h_n \to 1$ punktweise für $n \to \infty$.

Da für alle $x \in [a, 1]$

$$\begin{aligned} |h_n(x) - 1| &= \left|\sqrt[n]{n^2x} - 1\right| = \left|\sqrt[n]{n^2x} - \sqrt[n]{n^2a} + \sqrt[n]{n^2a} - 1\right| \\ &\leq \left|\sqrt[n]{n^2x} - \sqrt[n]{n^2a}\right| + \left|\sqrt[n]{n^2a} - 1\right| \overset{x \geq a}{=} \sqrt[n]{n^2x} - \sqrt[n]{n^2a} + 1 - \sqrt[n]{n^2a} \\ &\overset{x\leq 1}{\leq} \sqrt[n]{n^2} - \sqrt[n]{n^2a} + 1 - \sqrt[n]{n^2a} =: \alpha_n \to 0 \end{aligned}$$

für $n \to \infty$, ist die Funktionenfolge h_n gleichmäßig konvergent nach (a) in Satz 7.26 des Skriptes (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz).

Sei nun $a = 0$. Für $x = 0$ gilt $h_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. Für $x \neq 0$ gilt, mit der gleichen Rechnung wie oben, $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$. Deshalb konvergiert $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen h, wobei

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $x \in [0, 1]$. Weil h nicht stetig bei 0 ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein (vgl. Satz 7.28).

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen die Funktion f stetig ist:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} & \text{für } x \notin \{1, 3\}, \\ \dfrac{1}{2} & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{für } x = 3, \end{cases}$

(b) $f : [-7, 3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2 + 2x - 15,\ x^3\} & \text{für } x \in [-7, -5] \cup [-1, 3], \\ x + 5 & \text{für } x \in (-5, -1). \end{cases}$

Hinweis: Verwenden Sie bei (b), dass $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
(a) Die rationale Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners stetig. Wegen

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

verschwindet der Nenner für $x = 1$ oder $x = 3$. Daher ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ stetig, so dass auch f auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ stetig ist. Nun gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}.$$

Somit ist

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2} = f(1),$$

d.h. f ist in 1 stetig. Da 3 eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers von $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$$

nicht. Also ist f in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist) und f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ stetig.

(b) Wegen $x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7, -5]$ nichtnegativ, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x) = x^3$ für $x \in [-7, -5]$. Für $x \in [-1, 0]$ ist $x^3 \in [-1, 0]$, aber $x^2 + 2x - 15 \leq 21 + 0 - 15 = -14$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [-1, 0]$. Für $x \in [0, 3]$ ist $(x-3)(x+5) \leq 0$ und $x^3 \geq 0$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [0, 3]$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g, h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$. Daher ist f jedenfalls außerhalb von $\{-5, -1\}$ stetig. Wegen

$$\lim_{x \to -5^-} x^3 = -125 \neq 0 = \lim_{x \to -5^+} (x+5)$$

und

$$\lim_{x \to -1^-} (x+5) = 4 \neq -16 = \lim_{x \to -1^+} x^2 + 2x - 15$$

hat f in -5 und -1 eine Sprungstelle. Daher ist f genau auf

$$[-7, 3] \setminus \{-5, -1\}$$

stetig.

Aufgabe 3 (Übung):
Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a, b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Sei $h \coloneqq g - f$. Dann ist $h(a) = g(a) - f(a) < 0$ und $h(b) = g(b) - f(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz (h ist als Komposition der stetigen Funktionen f und g stetig) existiert somit ein $x_0 \in (a, b)$ mit $h(x_0) = g(x_0) - f(x_0) = 0$. $\square$

Aufgabe 4 (Übung):
Sei $a > 0$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$,

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{\log(x)}{x - 1}$,

(c) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$,

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{x}$.

Hinweis: Verwenden Sie bei (c) Ihre Lösung aus Teil (b).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Sei $a \neq 1$. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt mit Definition 7.37

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \log(a)} - 1}{x} = \log(a) \frac{e^{x \log(a)} - 1}{x \log(a)}.$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$ ist aus der Vorlesung bekannt (Beispiel 7.10). Außerdem gilt $\lim\limits_{x \to 0} x \log(a) = 0$. Es folgt daher

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a) \lim_{x \to 0} \frac{e^{x \log(a)} - 1}{x \log(a)} = \log(a).$$

Im Fall $a = 1$ erhält man direkt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$.

(b) Es gilt $\lim\limits_{y \to 0} e^y = 0$. Mit $x = e^y$ folgt daher

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log(x)}{x - 1} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1,$$

wobei der letzte Grenzwert wie in Teil a) verwendet wird.

(c) Sei $x \in (0, \infty)$. Es gilt

$$\left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{x+1} = e^{(x+1) \log\left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)}.$$

Betrachten wir nun den Exponenten der rechten Seite, sehen wir, dass

$$(x + 1) \log\left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right) = (x + 1) \frac{2}{2x + 1} \frac{\log\left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)}{\frac{2}{2x+1}} = \frac{2 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{1}{x}} \frac{\log\left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)}{\frac{2}{2x+1}}$$

gilt. Wir erhalten mit Teil b)

$$\lim_{x \to \infty} (x + 1) \log\left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right) = 1.$$

Es folgt das Ergebnis

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{x+1} = e.$$

(d) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\frac{\sqrt{1 + ax} - 1}{x} = \frac{(\sqrt{1 + ax} - 1)(\sqrt{1 + ax} + 1)}{x(\sqrt{1 + ax} + 1)} = \frac{1 + ax - 1}{x(\sqrt{1 + ax} + 1)} = \frac{a}{\sqrt{1 + ax} + 1}.$$

Für $x \to 0$ erhält man

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + ax} - 1}{x} = \frac{a}{2}.$$

Aufgabe 5 (Tutorium):
Untersuchen Sie

(a) die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^5x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ mit $g_n : (-1,1] \to \mathbb{R}$ und $g_n(x) = x^n(1-x)$ für alle $x \in (-1,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$,

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Betrachte zunächst $F(y) = \frac{y}{1+y^2}$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wegen $0 \le (1-|y|)^2 = 1 - 2|y| + y^2$, gilt $|F(y)| = \frac{|y|}{1+y^2} \le \frac{\frac{1+y^2}{2}}{1+y^2} = \frac{1}{2}$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wegen

$$|f_n(x)| = \left|\frac{n^2 x}{1+n^5x^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left|F\left(\sqrt{n}^5 x\right)\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2} =: \alpha_n \to 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, konvergiert f_n gleichmäßig gegen 0 für $n \to \infty$ nach (a) im Satz 7.26 des Skriptes.

(b) Sei $x = 1$. Dann ist $g_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deswegen ist $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = 0$. Ist $x < 1$, so ist $|x| < 1$ und die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist (absolut) konvergent. Deshalb gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1-x}{1-x} = 1.$$

Damit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ punktweise gegen g, wobei

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weil g nicht stetig bei 1 ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Bestimmen Sie jeweils eine Konstante y_0 so, dass die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich D stetig ist.

(a) $D = (0,\infty)$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) & \text{für } x \in D \setminus \{2\}, \\ y_0 & \text{für } x = 2. \end{cases}$

(b) $D = [-1,1]$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} & \text{für } x \in D \setminus \{0\}, \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(a) Da f in allen $x \in D \setminus \{2\}$ stetig ist, reicht es $f(2) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 2} f(x) = y_0$ gilt. Da $x = 2$ eine Nullstelle des Polynoms $8 - x^3$ ist, lässt es sich nach Satz 3.4 (1) schreiben als

$$8 - x^3 = (x-2) \cdot (-x^2 - 2x - 4).$$

Damit gilt für alle $x \in D \setminus \{2\}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2-x} \cdot \left(1 - \frac{12}{x^2+2x+4}\right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2-x} \cdot \frac{x^2+2x+4-12}{x^2+2x+4} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2-x} \cdot \frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4}. \end{aligned}$$

Wieder mit Satz 3.4 (1) lässt sich schreiben $x^2 + 2x - 8 = (x-2) \cdot (x+4)$ und folglich

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2-x} \cdot \frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2-x} \cdot \frac{(2-x)(-x-4)}{x^2+2x+4} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{(x+4)}{x^2+2x+4}.$$

Deshalb muss $y_0 = \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} -\frac{1}{x} \cdot \frac{(x+4)}{x^2+2x+4} = -\frac{1}{4}$ gewählt werden.

(b) Da f in allen $x \in D \setminus \{0\}$ stetig ist, reicht es $f(0) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = y_0$ gilt. Sei $x \in D \setminus \{0\}$. Definiere $y := \frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Dann gilt mit der dritten binomischen Formel (Kapitel 2, Slide 51 (1))

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} = \sqrt{y^2+y} - \sqrt{y^2-y} = \frac{y^2+y-(y^2-y)}{\sqrt{y^2+y}+\sqrt{y^2-y}} \\ &= \frac{2y}{y\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}}+\sqrt{1-\frac{1}{y}}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}}+\sqrt{1-\frac{1}{y}}\right)} \\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{|x|}}+\sqrt{1-\sqrt{|x|}}\right)}. \end{aligned}$$

Folglich muss $y_0 := \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{|x|}}+\sqrt{1-\sqrt{|x|}}\right)} = 1$ gewählt werden.

Aufgabe 7 (Tutorium):

Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$, (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

(i) Mit dem gleichen Standardtrick wie bei Folgen erhalten wir, dass dieser Grenzwert existiert und dass gilt

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{8+2x^{-1}+x^{-3}}{2+7x^{-2}} = \frac{8+0+0}{2+0} = 4.$$

(ii) Zähler und Nenner haben 2 als Nullstelle. Polynomdivision liefert

$$x^3-9x^2+16x-4 = (x-2)(x^2-7x+2)$$
$$3x^3-10x^2+9x-2 = (x-2)(3x^2-4x+1).$$

Sofern die Ausdrücke definiert sind, gilt also

$$\frac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2} = \frac{(x-2)(x^2-7x+2)}{(x-2)(3x^2-4x+1)} = \frac{x^2-7x+2}{3x^2-4x+1}.$$

Weiter ist 2 keine Nullstelle von $3x^2-4x+1$. Wir schließen, dass der gesuchte Grenzwert existiert und gegeben ist durch

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+2}{3x^2-4x+1} = \frac{8}{-5}.$$

(iii) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$, so ergibt sich mit dem Hinweis die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x}-2 = a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = \frac{(\sqrt[3]{8+x})^3-2^3}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+4} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+4}.$$

Folglich hat man

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8+0})^2+2\sqrt[3]{8+0}+4} = \frac{1}{12}.$$

(iv) Sei $x \neq 0$. Aus der Vorlesung (Beispiel 7.10) ist bekannt, dass $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\sin(x)}-1}{x} &= \frac{1+\sin(x)+\frac{\sin^2(x)}{2}+\frac{\sin^3(x)}{3!}+\ldots-1}{x} \\
&= \frac{\sin(x)+\frac{\sin^2(x)}{2}+\frac{\sin^3(x)}{3!}+\ldots}{x} \\
&= \frac{\sin(x)}{x}\left(1+\frac{\sin(x)}{2}+\frac{\sin^2(x)}{3!}+\ldots\right).
\end{aligned}$$

Aus Satz 7.4 geht hervor, dass das Produkt stetiger Funktionen wieder stetig ist. Wir erhalten daher also

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x)}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\left(1+\frac{\sin(x)}{2}+\frac{\sin^2(x)}{3!}+\ldots\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin(x)}{2}+\frac{\sin^2(x)}{3!}+\ldots\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (Tutorium):
Berechnen Sie, falls existent, die Grenzwerte der folgenden Funktionen mittels Potenzreihenentwicklung:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-\cos(x)-2x}{x^2}$,

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^2)-1+\frac{x^4}{2}}{x^8}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:

a) Die Reihendarstellungen von e^{3x} und $\cos(x)$ sind

$$\begin{aligned}
e^{3x} &= 1+\frac{3x}{1!}+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}++\frac{(3x)^4}{4!}\ldots = 1+3x+\frac{9x^2}{2}+\frac{27x^3}{6}+\frac{81x^4}{24}\ldots \\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{e^{3x}-\cos(x)-2x}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\left[\left(1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{27}{6}x^3+\frac{81}{24}x^4+\ldots\right)+\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots\right)-2x\right] \\
&= \frac{1}{x^2}\left[2+x+\frac{8}{2}x^2+\frac{27}{6}x^3+\frac{82}{24}x^4+\ldots\right] \\
&= \frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+4+\frac{9}{2}x+\frac{41}{12}x^2+\ldots \to \pm\infty \text{ für } x\to 0^{\pm}.
\end{aligned}$$

b) Die Reihendarstellung von $\cos(x^2)$ ist

$$\cos(x^2) = 1-\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^4}{4!}-\frac{(x^2)^6}{6!}+\ldots = 1-\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{12}}{720}+\ldots$$

Damit ergibt sich für $x \neq 0$ also

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x^2)-1+\frac{x^4}{2}}{x^8} &= \frac{\left(1-\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{12}}{720}+\ldots\right)-1+\frac{x^4}{2}}{x^8} \\
&= \frac{1}{x^8}\left(\frac{x^8}{24}-\frac{x^{12}}{720}+\ldots\right) \\
&= \frac{1}{24}-\frac{x^4}{720}+\ldots \to \frac{1}{24} \text{ für } x\to 0.
\end{aligned}$$