Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

Behandelt am 8. Januar 2026

Aufgabe 1 (Übung):
Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen kompakt sind. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils.

(a) $A_1 = [0,1]$,

(b) $A_2 = (0,1)$,

(c) $A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$,

(d) $A_4 = [0,1] \cup \{2\}$,

(e) $A_5 = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$,

(f) $A_6 = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$,

(g) $A_7 = \left\{x \in (0,1] \mid \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0\right\}$,

(h) $A_8 = \{x \in [0,1] \mid x \notin \mathbb{Q}\}$.

Aufgabe 2 (Übung):
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass D genau dann kompakt ist, wenn jede stetige Funktion auf D beschränkt ist.

Aufgabe 3 (Übung):
Beweisen Sie die folgenden Identitäten mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,

(b) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,

(c) $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$,

(d) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,

(e) $\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$,

(f) $\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$,

(g) $\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, mit $\cos x \neq -1$,

(h) $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$,

(i) $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$,

(j) $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$, mit $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Verwenden Sie die bekannten Additionstheoreme.

Aufgabe 4 (Übung):

(a) Zeigen Sie, dass für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ der Abstand der Punkte $e^{i\varphi}$ und $e^{i\psi}$ durch

$$\left|e^{i\varphi} - e^{i\psi}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)\right|$$

gegeben ist.

(b) Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die n-ten Einheitswurzeln – also Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ für $z \in \mathbb{C}$ – ein n-Eck mit Umfang

$$L_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

bilden.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} L_n = 2\pi.$$

(d) Interpretieren Sie die letzte Gleichung und zeichnen Sie für $n = 6$ ein Bild.

Aufgabe 5 (Tutorium):
Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) A abgeschlossen $\Rightarrow f(A)$ abgeschlossen,

(ii) B abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(B)$ abgeschlossen,

(iii) A beschränkt $\Rightarrow f(A)$ beschränkt,

(iv) B beschränkt $\Rightarrow f^{-1}(B)$ beschränkt.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Untersuchen Sie folgende Mengen auf Kompaktheit:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3,\ x \neq 2\}$

b) $B = \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

c) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$ und betrachte $C := f([-2, 1])$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$

e) Seien $A = [0, 2]$ und $B = (1, 3]$. Untersuchen Sie $E_1 := A \cap B$ und $E_2 := A \cup B$.

f) Für $a \in \mathbb{R}$ sei $F_a = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leq 1\}$. Zeigen Sie, dass F_a für alle $a \in \mathbb{R}$ kompakt ist.

Aufgabe 7 (Tutorium):

a) Beweisen Sie das Additionstheorem des Tangens: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\forall\right\}$ gilt

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)},$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 8 (Tutorium):

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^{201}.$$

Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass

$$\arg(z) = \begin{cases} +\arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \geq 0, \\ -\arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y < 0. \end{cases}$$

b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von z^3 und z^{150} für

$$z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right).$$

c) Geben Sie Betrag und Argument von $1 - e^{it}$ für $t \in (0, 2\pi)$ an.

Aufgabe 9 (Bonusaufgabe):
Wir betrachten eine unendliche Anordnung identischer Punktteilchen mit Ladung $q > 0$ entlang der x-Achse. Der Beobachtungspunkt befinde sich im Ursrpung, und die Ladungen seien an den Positionen $x_n = na$ mit $n \in \mathbb{N}$ und konstantem Abstand $a > 0$. Das elektrische Potential im Ursrpung ist gegeben durch

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q}{na},$$

wobei $\varepsilon_0 > 0$ die elektrische Feldkonstante des Vakuums ist. Wir nehmen an, dass die Ladung durch ein abschwächendes Medium gedämpft werde, sodass jede Ladung zusätzlich mit einem Faktor $e^{-\alpha n}$ gewichtet wird, wobei $\alpha > 0$ eine Dämpfungskonstante ist. Das resultierende effektive Potential ist dann gegeben durch

$$V_{\text{eff}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha n}}{n}.$$

Zeigen Sie, dass das Potential für alle $\alpha > 0$ endlich ist, d.h., zeigen Sie, dass die Reihe konvergiert und bestimmen Sie das effektive Potential.

Was würde passieren, wenn man das abschwächende Medium entfernt und die Dämpfung verschwindet ($\alpha = 0$)?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ für $|x| < 1$ gilt.

PRESENTS GET A LOT MORE IMPRESSIVE IF YOU TURN THE WRAPPING PAPER INSIDE OUT

Quelle:http://www.xkcd.com/2403/