

**Lösungsvorschlag zum 8. Übungsblatt**  
**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik**  
Wintersemester 2025/26  
8. Januar 2026

**Aufgabe 1 (Übung):**

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen kompakt sind. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils.

- |  |  |
|--|--|
| (a) $A_1 = [0, 1]$ ,                               | (e) $A_5 = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,            |
| (b) $A_2 = (0, 1)$ ,                               | (f) $A_6 = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ , |
| (c) $A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$ , | (g) $A_7 = \{x \in (0, 1] \mid \sin(\frac{1}{x}) \geq 0\}$ ,   |
| (d) $A_4 = [0, 1] \cup \{2\}$ ,                    | (h) $A_8 = \{x \in [0, 1] \mid x \notin \mathbb{Q}\}$ .        |

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:**

- (a) Die Menge  $A_1$  ist beschränkt, da die Menge nach oben durch 1 und nach unten durch 0 beschränkt ist. Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $A_1$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann ist  $x_n \in A_1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq x_0 \leq 1$ . Somit ist  $x_0 \in A_1$  und  $A_1$  nach Definition 7.40 abgeschlossen. Also ist  $A_1$  nach Satz 7.43 kompakt.
- (b) Auch  $A_2$  ist beschränkt aber nicht abgeschlossen, da 0 und 1 nicht enthalten sind. Wähle beispielsweise die Folge  $x_n = \frac{1}{n}$ , welche in  $A_2$  enthalten ist, da für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $x_n \in A_2$ . Allerdings gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \notin A_2$ . Also ist  $A_2$  nicht kompakt.
- (c) Die Bedingung  $x^2 \leq 4$  aus  $A_3$  ist äquivalent zu  $-2 \leq x \leq 2$  und damit ist  $A_3 = [-2, 2]$ . Also ist  $A_3$  abgeschlossen und beschränkt. Somit also auch kompakt nach Satz 7.43.
- (d) Die Menge  $A_4$  ist beschränkt, da für alle  $x \in [0, 1]$  gilt  $0 \leq x \leq 1$  und für  $x = 2$  gilt  $0 \leq x \leq 2$ . Also sind alle Werte in  $A_4$  durch 0 und 2 beschränkt. Für die Abgeschlossenheit sei  $(x_n)$  eine beliebige Folge in  $A_4$ , welche gegen ein  $x_0 \in \mathbb{R}$  konvergiert. Wir müssen zeigen, dass dann  $x_0 \in A_4$ . Wir unterscheiden zwei Fälle. **Fall 1:** Angenommen die Folge enthält unendlich viele Elemente aus  $[0, 1]$ , dann existiert eine Teilfolge  $(x_{n_k}) \subseteq [0, 1]$ , die gegen  $x_0$  konvergiert. Da offensichtlich  $[0, 1]$  abgeschlossen ist, folgt nach Definition 7.40, dass  $x_0 \in [0, 1] \subseteq A_4$ . **Fall 2:** Angenommen die Folge enthält nur endlich viele Elemente aus  $[0, 1]$ , dann liegen ab einem  $n_0 \in \mathbb{N}$  alle Folgenglieder  $x_n$  mit  $n \geq n_0$  in  $\{2\}$ . Also gilt  $x_n = 2$  für alle  $n \geq n_0$  und damit  $x_0 = 2 \in A_4$ . In beiden Fällen ist der Grenzwert wieder in  $A_4$ , die Menge  $A_4$  ist folglich kompakt.
- (e) Die Menge  $A_5$  ist beschränkt, da alle Werte zwischen 0 und 1 liegen. Sie ist nicht abgeschlossen, da der Grenzwert 0 der Folge  $x_n = \frac{1}{n}$  nicht enthalten ist. Demnach ist  $A_5$  nicht kompakt.
- (f) Wie in e), nur ist hier der Grenzwert in der Menge enthalten. Damit ist  $A_6$  kompakt.
- (g) Die Menge  $A_7$  ist beschränkt, da  $A_7 \subseteq (0, 1]$  und somit alle Werte zwischen 0 und 1 liegen. Sie ist allerdings nicht abgeschlossen. Dazu sei  $(x_n)$  eine beliebige Nullfolge, d.h.,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  mit  $\sin(1/x_n) \geq 0$ . Allerdings ist 0 nicht in der Menge enthalten und  $A_7$  ist somit nach Definition 7.40 nicht abgeschlossen, also auch nicht kompakt.
- (h) Als Teilmenge der kompakten Menge  $[0, 1]$  ist  $A_8$  beschränkt. Sie ist aber nicht abgeschlossen, da jede rationale Zahl in  $[0, 1]$  ein Häufungspunkt ist. Diese sind aber nicht in  $A_8$  enthalten und demnach ist die Menge nach Definition 7.42 nicht kompakt. Wir finden beispielsweise eine Folge  $(x_n)$  in  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  mit  $x_n \rightarrow q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  aber  $q \notin [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ .

### Aufgabe 2 (Übung):

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass  $D$  genau dann kompakt ist, wenn jede stetige Funktion auf  $D$  beschränkt ist.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

*Beweis.* Es sei  $D$  eine kompakte Menge und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist nach Satz 7.44 auch  $f(D)$  kompakt. Wegen Satz 7.43 ist  $f(D)$  beschränkt, d.h.,  $f$  ist beschränkt.

Es sei nun jede stetige Funktion auf  $D$  beschränkt. Insbesondere ist also die stetige Funktion  $\text{id}_D : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$  auf  $D$  beschränkt. also ist  $D = \text{id}_D(D)$  nach Voraussetzung beschränkt. Aufgrund von Satz 7.43 bleibt noch zu zeigen, dass  $D$  abgeschlossen ist.

Angenommen,  $D$  ist nicht abgeschlossen. Dann existieren eine Folge  $(x_n)$  in  $D$  und ein  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir definieren die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{|x-x_0|}$ . Dann ist  $f$  stetig, denn die Betragsfunktion ist stetig und es gilt  $x_0 \notin D$ . Zudem gilt  $f(x_n) = \frac{1}{|x_n-x_0|} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , also ist  $f$  unbeschränkt, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist  $D$  beschränkt und abgeschlossen, und somit nach Satz 7.43 kompakt.  $\square$

### Aufgabe 3 (Übung):

Beweisen Sie die folgenden Identitäten mit  $x, y \in \mathbb{R}$ :

- (a)  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ ,
- (b)  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ ,
- (c)  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ ,
- (d)  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ ,
- (e)  $|\sin(\frac{x}{2})| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ ,
- (f)  $|\cos(\frac{x}{2})| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ ,
- (g)  $|\tan(\frac{x}{2})| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ , mit  $\cos x \neq -1$ ,
- (h)  $\sin x + \sin y = 2 \sin(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2})$ ,
- (i)  $\cos x + \cos y = 2 \cos(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2})$ ,
- (j)  $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ , mit  $n \in \mathbb{N}$ .

**Hinweis:** Verwenden Sie *nicht* die Reihendarstellungen der Funktionen. a

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

Wir benutzen, dass  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$  und  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ . Wir wissen auch, dass  $\sin x = -\sin(-x)$  und  $\cos x = \cos(-x)$ , weil  $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i}$  und  $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}$  gelten.

- (a)  $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \frac{1}{4i} (2e^{i(x+y)} - 2e^{-i(x+y)}) = \sin(x+y)$ .
- (b)  $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos(x-y)$ .
- (c)  $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$ .
- (d)  $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$ .
- (e) Wir zeigen die äquivalente Gleichung, d.h.  $2 \sin^2(\frac{x}{2}) = 1 - \cos x$ . Es gilt  $1 - \cos x = 1 - [\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})] = [\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})] - \cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2}) = 2 \sin^2(\frac{x}{2})$ .

- (f) Wir zeigen die äquivalente Gleichung, d.h.  $2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$ . Es gilt  $1 + \cos x = 1 + [\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)] = [\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)] + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ .
- (g)  $|\tan\left(\frac{x}{2}\right)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \right| = \sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ .
- (h) Wir definieren  $a := \frac{x+y}{2}, b := \frac{x-y}{2}$ . Dann  $\sin x + \sin y = \sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b = 2 \sin a \cos b = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ .
- (i) Wir definieren  $a := \frac{x+y}{2}, b := \frac{x-y}{2}$ . Dann  $\cos x + \cos y = \cos(a+b) + \cos(a-b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + (\cos a \cos b + \sin a \sin b) = 2 \cos a \cos b = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ .
- (j) Wir benutzen, dass  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  und  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Dann gilt  $(\sinh x + \cosh x)^n = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} + \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2} = \sinh(nx) + \cosh(nx)$ .

#### Aufgabe 4 (Übung):

- (a) Zeigen Sie, dass für  $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$  der Abstand der Punkte  $e^{i\varphi}$  und  $e^{i\psi}$  durch

$$|e^{i\varphi} - e^{i\psi}| = 2 \left| \sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) \right|$$

gegeben ist.

- (b) Sei  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass die  $n$ -ten Einheitswurzeln – also Lösungen der Gleichung  $z^n = 1$  für  $z \in \mathbb{C}$  – ein  $n$ -Eck mit Umfang

$$L_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

bilden.

- (c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 2\pi.$$

- (d) Interpretieren Sie die letzte Gleichung und zeichnen Sie für  $n = 6$  ein Bild.

#### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- (a) Es gilt

$$e^{i\varphi} - e^{i\psi} = e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \left( e^{i\varphi - \frac{\varphi+\psi}{2}} - e^{i\psi - \frac{\varphi+\psi}{2}} \right) = e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \left( e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}} \right) = 2ie^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right).$$

Deshalb ist tatsächlich  $|e^{i\varphi} - e^{i\psi}| = \left| 2e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) \right|$ .

- (b) Die  $n$ -ten Einheitswurzeln sind nach Kapitel 8 Slide 13 der Vorlesung durch

$$w_0 := 1 = e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot 0}, w_1 := e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot 1}, \dots, w_{n-1} := e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot (n-1)}$$

gegeben. Nach Teilaufgabe (a) gilt

$$|w_{k+1} - w_k| = \left| e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot (k+1)} - e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot k} \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right|$$

für alle  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . Also bilden  $w_k$  mit  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  ein reguläres  $n$ -Eck vom Umfang

$$L_n = |w_{n-1} - w_0| + \sum_{k=0}^{n-2} |w_{k+1} - w_k| = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

- (c) Mit  $x = \pi/n$  sowie dem Beispiel in Kapitel 7 Slide 59 gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\pi \frac{\sin(x)}{x} = 2\pi$$

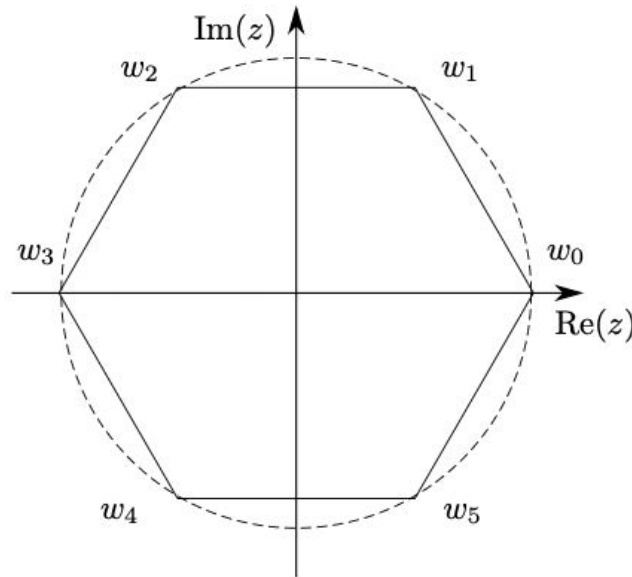


Figure 1: Sechste Einheitswurzeln

- (d) Das Ergebnis lässt sich wie folgt verstehen: Das von den  $w_k$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ) aufgespannte regelmäßige  $n$ -Eck approximiert immer besser den Einheitskreis  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ . Der Umfang der Rechtecke approximiert den Umfang der  $\mathbb{S}^1$ . Eine Skizze für  $n = 6$  ist in der Abbildung (1) zu finden.

**Aufgabe 5 (Tutorium):**

Seien  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ . Beweisen oder widerlegen Sie:

- (i)  $A$  abgeschlossen  $\Rightarrow f(A)$  abgeschlossen,
- (ii)  $B$  abgeschlossen  $\Rightarrow f^{-1}(B)$  abgeschlossen,
- (iii)  $A$  beschränkt  $\Rightarrow f(A)$  beschränkt,
- (iv)  $B$  beschränkt  $\Rightarrow f^{-1}(B)$  beschränkt.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:**

- (a) **Behauptung:** Die Aussage ist falsch.

**Gegenbeispiel:** Für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := e^x$  und  $A := \mathbb{R}$  ist  $A$  abgeschlossen, aber

$$f(A) = (0, \infty)$$

ist nicht abgeschlossen.

- (b) **Behauptung:**  $B$  abgeschlossen  $\Rightarrow f^{-1}(B)$  abgeschlossen.

**Beweis:** Sei  $B$  abgeschlossen und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $f^{-1}(B)$ . Zudem existiere ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow x$ . Wir müssen zeigen, dass  $x \in f^{-1}(B)$  liegt, also  $f(x) \in B$ . Da  $f$  nach Voraussetzung stetig ist, gilt

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Nach Voraussetzung gilt  $f(x_n) \in B$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $B$  abgeschlossen ist, folgt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in B.$$

Also ist  $x \in f^{-1}(B)$  und damit  $f^{-1}(B)$  abgeschlossen. □

(c) **Behauptung:**  $A$  beschränkt  $\Rightarrow f(A)$  beschränkt.

**Beweis:** Da  $A$  beschränkt ist, existiert ein  $M \geq 0$  mit  $|x| \leq M$  für alle  $x \in A$ . Dann gilt  $A \subseteq [-M, M]$ . Das Intervall  $[-M, M]$  ist kompakt, und wegen der Stetigkeit von  $f$  ist auch  $f([-M, M])$  kompakt. Nach dem Satz 7.42 ist jede kompakte Menge beschränkt. Insbesondere gilt  $f([-M, M])$  ist beschränkt. Da  $f(A) \subset f([-M, M])$ , ist  $f(A)$  als Teilmenge einer beschränkten Menge selbst beschränkt.  $\square$

(d) **Behauptung:** Die Aussage ist falsch.

**Gegenbeispiel:** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) := 0$  und  $B := \{0\}$ . Dann ist  $B$  beschränkt, aber  $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$  ist unbeschränkt.

### Aufgabe 6 (Tutorium):

Untersuchen Sie folgende Mengen auf Kompaktheit:

a)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3, x \neq 2\}$

b)  $B = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

c) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = x^2$  und betrachte  $C := f([-2, 1])$ .

d)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$

e) Seien  $A = [0, 2]$  und  $B = (1, 3]$ . Untersuchen Sie  $E_1 := A \cap B$  und  $E_2 := A \cup B$ .

f) Für  $a \in \mathbb{R}$  sei  $F_a = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leq 1\}$ . Zeigen Sie, dass  $F_a$  für alle  $a \in \mathbb{R}$  kompakt ist.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(a) Die Menge  $A$  ist beschränkt, da alle Werte zwischen 1 und 3 liegen. Sie ist aber nach Definition 7.40 nicht abgeschlossen, da beispielsweise der Grenzwert  $x_0 = 2$  der Folge  $x_n = 2 + \frac{1}{n}$  nicht in  $A$  enthalten ist.

(b) Die Folge  $x_n = \frac{n}{n+1}$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $x_0 = 1$ . Damit ist die Menge  $B$  beschränkt, da nur Werte zwischen  $\frac{1}{2}$  und 1 angenommen werden. Allerdings ist der Grenzwert  $x_0 = 1$  nicht in  $B$  enthalten und somit ist die Menge nach Definition 7.40 nicht abgeschlossen. Also ist sie auch nicht kompakt.

(c) Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist eine Parabel und hat demnach ihr Minimum am Scheitelpunkt, also bei  $x = 0$  mit dem zugehörigen Funktionswert  $f(0) = 0$ . Ihr Maximum liegt auf dem Rand bei  $-2$  mit  $f(-2) = 4$ . Also ist  $C = f([-2, 1]) = [0, 4]$ . Diese Menge ist offensichtlich abgeschlossen und beschränkt. Somit ist  $C$  kompakt.

(d) Durch Faktorisieren erhalten wir  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ . Die Ungleichung  $(x - 1)(x - 2) \leq 0$  ist erfüllt für alle  $x \in [1, 2]$ . Also ist  $D = [1, 2]$  abgeschlossen und beschränkt. Somit ist  $D$  kompakt.

(e) Wir haben  $E_1 = A \cap B = (1, 2]$ . Diese Menge ist beschränkt aber nicht abgeschlossen, da die 1 nicht enthalten ist, was beispielsweise der Grenzwert der Folge  $x_n = \frac{n+1}{n}$  ist. Somit ist  $E_1$  nicht kompakt. Für die zweite Menge haben wir  $E_2 = A \cup B = [0, 3]$ . Diese Menge ist wieder abgeschlossen und beschränkt, und damit kompakt.

(f) Die Menge  $F_a$  ist das Intervall  $[a - 1, a + 1]$  und sie ist für jedes  $a \in \mathbb{R}$  kompakt.

### Aufgabe 7 (Tutorium):

a) Beweisen Sie das Additionstheorem des Tangens: Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x, y, x+y \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$  gilt

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)},$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

## Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

a) Es gilt mit den Additionstheoremen für den Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\ &= \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(y)\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)}{\cos(x)\cos(y)\left(1 - \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}\right)} \\ &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.\end{aligned}$$

b) Nach Vorlesung gilt  $\sin(x), \cos(x) > 0$  für  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Durch mehrmaliges Anwenden der Additionstheoreme folgt

$$\begin{aligned}0 &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).\end{aligned}$$

Also folgt  $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$  und wegen  $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$  ergibt sich  $4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ , somit

$$\frac{1}{2} = \left|\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Aus einer beliebigen der obigen Gleichungen folgt dann auch  $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$ , also  $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Weiterhin folgt

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

und deshalb

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

## Aufgabe 8 (Tutorium):

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{201}.$$

**Hinweis:** Nutzen Sie ohne Beweis, dass

$$\arg(z) = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y < 0. \end{cases}$$

b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von  $z^3$  und  $z^{150}$  für

$$z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right).$$

c) Geben Sie Betrag und Argument von  $1 - e^{it}$  für  $t \in (0, 2\pi)$  an.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:**

a) Nach dem Hinweis gilt mit  $z_{\pm} = 1 \pm i\sqrt{3}$ , dass (wegen  $|z_{\pm}| = 2$ )

$$\arg z_{\pm} = \pm \arccos \frac{1}{2} = \pm \frac{\pi}{3}.$$

Somit gilt

$$\left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^{201} = \left( \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} \right)^{201} = \left( e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^{201} = e^{i\frac{402\pi}{3}} = e^{i134\pi}.$$

Da die Exponentialfunktion  $2\pi$ -periodisch ist, gilt  $e^{i134\pi} = 1$ , also

$$\left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^{201} = 1 = (1 + i \cdot 0) = 1 \cdot e^{i0}.$$

b) Es gilt  $z = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ , also (mit der  $2\pi$ -Periodizität der Exponentialfunktion)

$$z^3 = e^{i\frac{15\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}},$$

sowie

$$z^{150} = e^{i\frac{750\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

c) Es gilt

$$1 - e^{it} = e^{i\frac{t}{2}} \left( e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}} \right) = -2i \sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}} = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t-\pi}{2}},$$

wobei im letzten Schritt  $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$  benutzt wurde. Wegen  $2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$  und

$$\frac{t-\pi}{2} \in (-\pi, \pi) \quad \text{für } t \in (0, 2\pi)$$

ist dies bereits die Polardarstellung.

**Aufgabe 9 (Bonusaufgabe):**

Wir betrachten eine unendliche Anordnung identischer Punktteilchen mit Ladung  $q > 0$  entlang der  $x$ -Achse. Der Beobachtungspunkt befinde sich im Ursprung, und die Ladungen seien an den Positionen  $x_n = na$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und konstantem Abstand  $a > 0$ . Das elektrische Potential im Ursprung ist gegeben durch

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q}{na},$$

wobei  $\epsilon_0 > 0$  die elektrische Feldkonstante des Vakuums ist. Wir nehmen an, dass die Ladung durch ein abschwächendes Medium gedämpft werde, sodass jede Ladung zusätzlich mit einem Faktor  $e^{-\alpha n}$  gewichtet wird, wobei  $\alpha > 0$  eine Dämpfungskonstante ist. Das resultierende effektive Potential ist dann gegeben durch

$$V_{\text{eff}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha n}}{n}.$$

Zeigen Sie, dass das Potential für alle  $\alpha > 0$  endlich ist, d.h., zeigen Sie, dass die Reihe konvergiert und bestimmen Sie das effektive Potential.

Was würde passieren, wenn man das abschwächende Medium entfernt und die Dämpfung verschwindet ( $\alpha = 0$ )?

**Hinweis:** Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$  für  $|x| < 1$  gilt.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9:

Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $0 < \frac{e^{-\alpha n}}{n} \leq e^{-\alpha n}$  und die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(e^\alpha)^n}$  mit  $0 < 1/e^\alpha < 1$  ist eine geometrische Reihe. Demnach konvergiert die Reihe mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n} = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} < \infty.$$

Somit gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass unsere ursprüngliche Reihe nach dem Majorantenkriterium konvergiert. Mit dem in der Aufgabenstellung gegebenen Beweis findet man leicht, dass das effektive Potential den Wert

$$V_{\text{eff}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha n}}{n} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln(1 - e^{-\alpha})$$

besitzt.

Im Fall, dass die Dämpfung verschwindet ist  $\alpha = 0$  und das effektive Potential wäre proportional zur harmonischen  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  Reihe, welche bekannter Weise divergiert. Demnach würde die unendliche Kette gleichgeladener Teilchen ein unendliches Potential im Ursprung erzeugen, was unphysikalisch ist.



PRESENTS GET A LOT MORE IMPRESSIVE IF YOU TURN THE WRAPPING PAPER INSIDE OUT

Quelle: <http://www.xkcd.com/2403/>