Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

Behandelt am 15. Januar 2026

Aufgabe 1 (Übung):
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(x+1)}{e^x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^{20}-1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) + \dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos(x^{-1})}{\sin(x)}$.

Aufgabe 2 (Übung):
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon D\to\mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie die Ableitung in allen Punkten, in denen f differenzierbar ist.

(a) $D=\mathbb{R}, \quad f(x)=|x|^3$,

(b) $D=\mathbb{R}, \quad f(x)=x^5-3x^2+2x+17$,

(c) $D=\mathbb{R}, \quad f(x)=\frac{1}{x^2+1}$,

(d) $D=(1,\infty), \quad f(x)=\log(\log(x))$,

(e) $D=\mathbb{R}, \quad f(x)=\cos(2x)e^{\sin(x)}$.

Aufgabe 3 (Übung):
Berechnen Sie mit dem Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen die Ableitungen von

- $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
- $\operatorname{Arcosh}\colon [1,\infty)\to[0,\infty)$,

in allen Punkten, in denen die Ableitung existiert.

Aufgabe 4 (Übung):
Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Ungleichung bzw. den folgenden Grenzwert:

(a) $e^{x^2}-e^{y^2}\le (x-y)(x+y)e^{x^2}$ für alle $x>y>0$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(x\big(\log\big(1+\sqrt{1+x^2}\big)-\log(x)\big)\big)$.

Aufgabe 5 (Tutorium):
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie die Ableitung in allen Punkten, in denen f differenzierbar ist.

(a) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}}$,

(b) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^x$,

(c) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^{(x^x)}$,

(d) $D = (0, \pi), \quad f(x) = x^{\sin(x)} \sin(x)^x$,

(e) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin(x)|$.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2} - 1 + x\sin(x)}{\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1}$,

(b) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(\sin(x))}{x - \pi}$,

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}$,

(d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \tan(x)$.

Aufgabe 7 (Tutorium):
Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Ungleichungen:

(a) $x\log(x) - y\log(y) \leq (x-y)(1+\log(x))$ für alle $x > y > 0$.

(b) $|\log(\cos(x)) - \log(\cos(y))| \leq \sqrt{3}|x-y|$ für alle $x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

Aufgabe 8 (Tutorium):
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *positiv homogen* von Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ für $x \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist mit Ableitung $f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x)$.