

**Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt**  
**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik**  
Wintersemester 2025/26  
15. Januar 2026

**Aufgabe 1 (Übung):**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{e^x}, & \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \tan(x) + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right), \\ \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^{20} - 1}, & \qquad \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(x^{-1})}{\sin(x)}. \end{aligned}$$

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:**

(a) Da die Funktion  $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\log(x+1)}{e^x}$  stetig ist, gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{e^x} = f(0) = 0.$$

(b) Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{20} - 1 = 0$ . Die Regel von l'Hospital liefert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^{20} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{20x^{19}} = \frac{1}{20}.$$

(c) Für  $x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$  ist

$$\tan(x) + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{(x - \frac{\pi}{2}) \sin(x) + \cos(x)}{(x - \frac{\pi}{2}) \cos(x)} =: \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x).$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + (x - \frac{\pi}{2}) \cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) - (x - \frac{\pi}{2}) \sin(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{2}) \cos(x)}{\cos(x) - (x - \frac{\pi}{2}) \sin(x)} =: \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)}, \end{aligned}$$

sofern der letzte Grenzwert tatsächlich existiert. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} F(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} G(x).$$

Nochmalige Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - (x - \frac{\pi}{2}) \sin(x)}{-\sin(x) - \sin(x) - (x - \frac{\pi}{2}) \cos(x)} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Insgesamt haben wir also

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \tan(x) + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = 0.$$

Die Begründung, warum wir l'Hospital anwenden dürfen, erfolgt dabei rückwärts: Da  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F'(x)}{G'(x)} = 0$  ist, existiert auch  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)} = 0$ , weshalb auch  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  existiert.

- (d) Wir versuchen, ob wir die Regel von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler  $f(x) = x^2 \cos(x^{-1})$  und Nenner  $g(x) = \sin(x)$  gegen 0, aber

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^{-1}) + x^2 \sin(x^{-1}) \cdot \frac{1}{x^2}}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^{-1}) + \sin(x^{-1})}{\cos(x)}$$

existiert nicht, denn für  $x_n := ((n + \frac{1}{2})\pi)^{-1}$  hat der Bruch den Wert  $\frac{(-1)^n}{\cos(x_n)}$ . Die Regel von de l'Hospital ist demnach nicht anwendbar. Der Grenzwert existiert jedoch, denn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(x^{-1})}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot x \cos(x^{-1}) = 1 \cdot 0 = 0.$$

### Aufgabe 2 (Übung):

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie die Ableitung in allen Punkten, in denen  $f$  differenzierbar ist.

- (a)  $D = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|^3$ ,
- (b)  $D = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17$ ,
- (c)  $D = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ,
- (d)  $D = (1, \infty)$ ,  $f(x) = \log(\log(x))$ ,
- (e)  $D = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos(2x)e^{\sin(x)}$ .

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

Alle Funktionen bis auf diejenige in Teil a) sind als Komposition differenzierbarer Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) auf ihrem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.

- (a) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{für } x \geq 0, \\ -x^3, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Nach Vorlesung ist  $f$  auf  $(0, \infty)$  differenzierbar mit  $f'(x) = 3x^2$ ,  $x > 0$ . Ebenso ist  $f$  auf  $(-\infty, 0)$  differenzierbar mit  $f'(x) = -3x^2$ ,  $x < 0$ . Da  $f$  in 0 stetig ist und

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$$

gelten, folgt aus Satz 9.19, dass  $f$  auch in 0 differenzierbar ist mit Ableitung  $f'(0) = 0$ .

- (b) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $f'(x) = 5x^4 - 6x + 2$ .
- (c) Nach der Quotientenregel gilt für jedes  $x \in \mathbb{R}$ , dass

$$f'(x) = \frac{0 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

- (d) Nach der Vorlesung ist  $\log$  differenzierbar und es gilt  $\log'(x) = \frac{1}{x}$  für alle  $x > 0$ . Es folgt mit der Kettenregel, dass

$$f'(x) = [\log \circ \log]'(x) = (\log' \circ \log)(x) \cdot \log'(x) = \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log(x)} \quad \forall x > 1$$

(e) Mit der Kettenregel gilt  $[\exp \circ \sin]' = (\exp' \circ \sin) \cdot \sin' = (\exp \circ \sin) \cdot \cos$ . Sei ferner  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $g(x) = 2x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Es folgt wieder mit der Kettenregel  $(\cos \circ g)' = (\cos' \circ g) \cdot g' = -2(\sin \circ g)$ . Mit der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(\cos \circ g) \cdot (\exp \circ \sin)]'(x) \\ &= (\cos \circ g)'(x) \cdot (\exp \circ \sin)(x) + (\cos \circ g)(x) \cdot (\exp \circ \sin)'(x) \\ &= -2 \sin(2x) e^{\sin(x)} + \cos(2x) \cos(x) e^{\sin(x)} \\ &= (\cos(2x) \cos(x) - 2 \sin(2x)) e^{\sin(x)} \end{aligned}$$

### Aufgabe 3 (Übung):

Berechnen Sie mit dem Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen die Ableitungen von

- Arsinh:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- Arcosh:  $[1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,

in allen Punkten, in denen die Ableitung existiert.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

*Sinus Hyperbolicus:* Es ist  $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit Grenzwerten  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sinh(x) = \pm\infty$ . Nach dem Zwischenwertsatz ist also  $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Wegen  $\sinh'(x) = \cosh(x) \geq 1$  ist  $\sinh$  streng monoton wachsend, also bijektiv, und der Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen liefert:

$$\text{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\text{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\text{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\text{Arsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ , wobei wir  $\cosh^2(y) = 1 + \sinh^2(y) \geq 0$  verwendet haben.

*Cosinus Hyperbolicus:* Es ist  $\cosh: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $\cosh(0) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh(x) = \infty$ . Wegen  $\cosh'(x) = \sinh(x) > 0$  für  $x > 0$  und dem Mittelwertsatz ist  $\cosh$  auf  $[0, \infty)$  streng monoton wachsend, also bijektiv, und der Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen liefert:

$$\text{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\text{Arcosh}(x))} = \frac{1}{\sinh(\text{Arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

für  $x > 1$ , wobei wir  $\sinh^2(y) = \cosh^2(y) - 1$  und  $\text{Arcosh}(x) > 0$  verwendet haben.

In  $x = 1$  ist  $\text{Arcosh}$  nicht differenzierbar wegen  $\cosh'(0) = 0$ : Wäre  $\text{Arcosh}$  differenzierbar, so würde aus der Kettenregel folgen:

$$1 = (\text{Arcosh} \circ \cosh)'(0) = \text{Arcosh}'(\cosh(0)) \cdot \cosh'(0) = \text{Arcosh}'(1) \cdot \sinh(0) = 0.$$

### Aufgabe 4 (Übung):

Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Ungleichung bzw. den folgenden Grenzwert:

- $e^{x^2} - e^{y^2} \leq (x - y)(x + y)e^{x^2}$  für alle  $x > y > 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x(\log(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \log(x)))$ .

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $0 < y < x$ . Betrachte die Funktion  $f: [y^2, x^2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto e^t$ . Da  $f$  auf  $[y^2, x^2]$  stetig und auf  $(y^2, x^2)$  differenzierbar ist, erfüllt  $f$  die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Danach existiert ein  $\xi \in (y^2, x^2)$  mit

$$e^{x^2} - e^{y^2} = f(x^2) - f(y^2) = (x^2 - y^2)f'(\xi) = (x - y)(x + y)e^\xi \leq (x - y)(x + y)e^{x^2}$$

wegen der Monotonie der (reellen) Exponentialfunktion.

- (b) Sei  $x \geq 1$ . Dann ist  $\log$  auf  $[x, 1 + \sqrt{1 + x^2}]$  stetig und auf  $(x, 1 + \sqrt{1 + x^2})$  differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein  $\xi_x \in (x, 1 + \sqrt{1 + x^2})$  mit

$$\begin{aligned} x \left( \log \left( 1 + \sqrt{1 + x^2} \right) - \log(x) \right) &= \frac{x}{\xi_x} \left( 1 + \sqrt{1 + x^2} - x \right) \\ &= \frac{x}{\xi_x} \left( 1 + \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{x^2} \right) \\ &= \frac{x}{\xi_x} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{x^2}} \right) \end{aligned}$$

Wegen  $x < \xi_x < 1 + \sqrt{1 + x^2}$  gilt ferner

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}} = \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \leq \frac{x}{\xi_x} \leq \frac{x}{x} = 1.$$

Damit ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\xi_x} = 1$ . Deshalb ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \log \left( 1 + \sqrt{1 + x^2} \right) - \log(x) \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\xi_x} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{x^2}} \right) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\xi_x} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{x^2}} \right) \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5 (Tutorium):**

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie die Ableitung in allen Punkten, in denen  $f$  differenzierbar ist.

- (a)  $D = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}}$ ,  
 (b)  $D = (0, \infty)$ ,  $f(x) = x^x$ ,  
 (c)  $D = (0, \infty)$ ,  $f(x) = x^{(x^x)}$ ,  
 (d)  $D = (0, \pi)$ ,  $f(x) = x^{\sin(x)} \sin(x)^x$ ,  
 (e)  $D = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |\sin(x)|$ .

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:**

Alle Funktionen bis auf diejenige in Teil e) sind als Komposition differenzierbarer Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) auf ihrem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.

- (a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass  $\cosh$  differenzierbar ist und  $\cosh' = \sinh$  gilt. Ebenfalls laut Vorlesung ist die Abbildung  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$  differenzierbar und es gilt  $g'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$  für alle  $x > 0$ . Es folgt mit der Kettenregel, dass

$$\begin{aligned} f'(x)(g \circ \cosh)'(x) &= (g' \circ \cosh)(x) \cdot \cosh'(x) \\ &= \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{(\cosh(x))^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \sinh(x) \\ &= -\frac{\sinh(x)}{2(\cosh(x))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

- (b) Es gilt  $f(x) = x^x = e^{x \log x}$ . Sei  $g(x) := x \log(x)$ . Mit der Ketten- und Produktregel folgt dann für jedes  $x > 0$

$$f'(x) = e^{g(x)} g'(x) = x^x (1 \cdot \log x + x \cdot x^{-1}) = (1 + \log x) x^x.$$

- (c) Setzt man  $g(x) := x^x = e^{x \log x}$  und  $h(x) := g(x) \log(x)$ , so ist  $f(x) = x^{g(x)} = e^{g(x) \log x} = e^{h(x)}$  für jedes  $x > 0$ . Mit Teil b) sowie der Ketten- und Produktregel folgt für  $x > 0$ , dass

$$f'(x) = e^{h(x)} h'(x) = x^{(x^x)} (g'(x) \log x + g(x) x^{-1}) = x^{(x^x)} ((1 + \log x) x^x \log x + x^{x-1}).$$

- (d) Sei  $g: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $g(x) = x^{\sin(x)} = e^{\log(x) \sin(x)}$  und  $h: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $h(x) = \sin(x)^x = e^{\log(\sin(x)) x}$ . Mit der Ketten- und Produktregeln folgt

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\exp \circ (\log \cdot \sin))'(x) = (\exp' \circ (\log \cdot \sin))(x) \cdot (\log \cdot \sin)'(x) \\ &= (\exp \circ (\log \cdot \sin))(x) \cdot (\log' \cdot \sin + \log \cdot \sin')(x) \\ &= x^{\sin(x)} \cdot \left( \frac{\sin(x)}{x} + \log(x) \cos(x) \right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\exp \circ (\log \circ \sin \cdot \text{id}))'(x) = (\exp' \circ (\log \circ \sin \cdot \text{id}))(x) \cdot (\log \circ \sin \cdot \text{id})'(x) \\ &= (\exp \circ (\log \circ \sin \cdot \text{id}))(x) \cdot ((\log \circ \sin)' \cdot \text{id} + (\log \circ \sin) \cdot \text{id}')(x) \\ &= (\exp \circ (\log \circ \sin \cdot \text{id}))(x) \cdot ((\log' \circ \sin \cdot \sin') \cdot \text{id} + (\log \circ \sin))(x) \\ &= \sin(x)^x \left( \frac{x \cos(x)}{\sin(x)} + \log(\sin(x)) \right). \end{aligned}$$

Mit der Produktregel ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [g \cdot h]'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \\ &= x^{\sin(x)} \sin(x)^x \left( \frac{\sin(x)}{x} + \log(x) \cos(x) + \frac{x \cos(x)}{\sin(x)} + \log(\sin(x)) \right) \end{aligned}$$

(e) Die Funktion  $f$  lässt sich offenbar auch als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ \sin x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ gerade} \\ -\sin x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ ungerade} \end{cases}$$

schreiben. Weil  $\sin$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist, ist  $f$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  differenzierbar und es gilt dort

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ gerade} \\ -\cos x, & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

In den Punkten  $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  ist  $f$  nicht differenzierbar: Wir untersuchen zunächst die Stellen  $x_0 = k\pi$  mit geradem  $k \in \mathbb{Z}$  und zeigen, dass der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  nicht existiert. Es gilt nämlich

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \sin'(x_0) = \cos(x_0) = 1$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{-\sin x - (-\sin x_0)}{x - x_0} = (-\sin)'(x_0) = -\cos(x_0) = -1.$$

Also ist  $f$  in diesen Punkten nicht differenzierbar. An den Stellen  $k\pi$  mit ungeradem  $k \in \mathbb{Z}$  kann man analog zeigen, dass die einseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten  $-1$  und  $1$  sind, weswegen  $f$  dann auch in diesen Punkten nicht differenzierbar ist.

### Aufgabe 6 (Tutorium):

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin(x)}{\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1},$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)},$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x - \pi},$

(d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x).$

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(a) Zähler und Nenner sind differenzierbar in  $(-1, 1)$  und nehmen in  $0$  den Wert Null an. Die Regel von de l'Hospital liefert (mit  $f(x) := e^{-x^2} - 1 + x \sin(x)$  und  $g(x) := \sqrt{1-x^2} + x^2 - 1$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin(x)}{\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{-x^2} + \sin(x) + x \cos(x)}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x}.$$

Dieser Grenzwert existiert (wie wir gleich zeigen), und wir bestimmen ihn durch ein weiteres Anwenden der Regel von de l'Hospital, denn Zähler und Nenner sind wieder differenzierbar auf  $(-1, 1)$  und nehmen in  $0$  den Wert Null an. Es folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{-x^2} + \sin(x) + x \cos(x)}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} + 2 \cos(x) - x \sin(x)}{-\frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + 2} = \frac{0}{1} = 0$$

(b) Die Funktionen  $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_1(x) = \sin(\sin(x)) \quad \text{und} \quad f_2(x) = x - \pi$$

sind differenzierbar und es gilt  $\lim_{x \rightarrow \pi} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} f_2(x) = 0$ . Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(\sin(x)) \cos(x)}{1} = -1.$$

- (c) Wir wenden zwei Mal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (Zähler und Nenner nehmen in beiden Fällen den Wert 0 an). Wegen  $(x^x)' = x^x(1 + \log x)$  (siehe Aufgabe 5 (b)) ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1 + \log(x)) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1 + \log(x))^2 + x^x \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 1}{-1} = -2.$$

- (d) Wir möchten

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin(x)}{\cos(x)} =: \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

berechnen. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x).$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(x)}{-\sin(x)} = -1.$$

### Aufgabe 7 (Tutorium):

Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Ungleichungen:

- (a)  $x \log(x) - y \log(y) \leq (x - y)(1 + \log(x))$  für alle  $x > y > 0$ .  
 (b)  $|\log(\cos(x)) - \log(\cos(y))| \leq \sqrt{3}|x - y|$  für alle  $x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ .

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

- (a) Seien  $0 < y < x$ . Definiere  $f: [y, x] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto t \log(t)$ . Dann ist  $f$  auf  $[y, x]$  stetig und auf  $(y, x)$  differenzierbar mit  $f'(t) = 1 \cdot \log(t) + t \cdot \frac{1}{t} = 1 + \log(t)$ ,  $t \in (y, x)$ . Nach dem Mittelwertsatz existiert ein  $\xi \in (y, x)$  mit

$$x \log(x) - y \log(y) = (x - y)f'(\xi) = (x - y)(1 + \log(\xi)) \leq (x - y)(1 + \log(x)),$$

weil  $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend ist.

- (b) Wir betrachten die Funktion  $f: [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \log(\cos(t))$ . Diese ist auf  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$  stetig differenzierbar mit  $f'(t) = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = -\tan(t)$ . Da  $\tan$  auf  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$  streng monoton wachsend ist und  $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$  sowie  $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$  gelten, ergibt sich

$$|f'(t)| \leq \sqrt{3} \quad \text{für alle } t \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}].$$

Sind  $x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ , so finden wir nach dem Mittelwertsatz ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $y$  mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

Es folgt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq \sqrt{3}|x - y|.$$

### Aufgabe 8 (Tutorium):

Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *positiv homogen* von Grad  $\alpha \in \mathbb{R}$ , d.h. es gilt  $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ . Zeigen Sie, dass  $f$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar ist mit Ableitung  $f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x)$ .

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:

Beweis: Sei  $x \in \mathbb{R} \setminus 0$ . Dann gilt für  $|h| < |x|$ :

$$f(x+h) = f\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right) \cdot x\right) = \left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha f(x).$$

Schreiben wir  $g(h) := \left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha$ , so ist

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{g(h) - g(0)}{h} f(x) \rightarrow g'(0) f(x).$$

Die Ableitung von  $g$  lässt sich mit den bekannten Rechenregeln berechnen als  $\alpha \cdot \frac{1}{x}$ , woraus die Behauptung folgt.

*Alternatives Argument:* Für  $x > 0$  ist  $f(x) = x^\alpha f(1)$  und damit  $f$  differenzierbar mit  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} f(1) = \frac{\alpha}{x} f(x)$ . Für  $x < 0$  folgt die Behauptung analog aus  $f(x) = (-x)^\alpha f(-1)$ . Dabei folgen die beiden verwendeten Identitäten direkt, indem man in der Annahme  $(\lambda, x) \rightsquigarrow (\pm x, \pm 1)$  einsetzt.  $\square$