Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

Behandelt am 22. Januar 2026

Aufgabe 1 (Übung):
Rechnen Sie die *Leibnizregel* nach. Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei in I mindestens n-mal differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Aufgabe 2 (Übung):
Die Funktion $g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = \ln(1 + x)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(g; 0)$ und zeigen Sie, dass

$$0 \leq g(x) - T_4(g; 0)(x) \leq \frac{1}{5} x^5$$

für alle $x \geq 0$ gilt.

Aufgabe 3 (Übung):
Finden Sie ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) + x^2 f(x) = 0, \qquad f(0) = 1.$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass f sich durch eine Potenzreihe darstellen lässt.

Aufgabe 4 (Übung):
Es sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie $f^{(20)}(0)$ und $f^{(31)}(0)$, wobei

(a) $f(x) = \arctan x$,

(b) $f(x) = \log\bigl(1 - x^2\bigr)$.

Aufgabe 5 (Tutorium):
Berechnen Sie die Grenzwerte

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x)}$,

(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$,

(iii) $\lim_{x\to\infty} \big(\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\big)$.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Die Funktion $g : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(g; \frac{1}{2}\big)$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$\left| g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(x) \right| \leq C \left| x - \frac{1}{2} \right|^3$$

für alle $x \in [0,1]$ gilt.

Aufgabe 7 (Tutorium):
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

Aufgabe 8 (Tutorium):
Sei $f : [-3,2] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ definiert. Begründen Sie, warum die Funktion f Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.