

**Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt**  
**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik**  
Wintersemester 2025/26  
22. Januar 2026

**Aufgabe 1 (Übung):**

Rechnen Sie die *Leibnizregel* nach. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei  $n$ -mal differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:**

Wir zeigen die Aussage durch vollständige Induktion. Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen. Der Induktionsanfang ist die gewöhnliche Produktregel, nach ihr gilt

$$(fg)^{(1)} = f'g + fg' = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)}.$$

Für den Induktionsschritt  $n \rightarrow n+1$  seien  $f, g$  zwei  $(n+1)$ -mal differenzierbare Funktionen. Wir nehmen an, dass die Induktionsannahme

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt und zeigen die Behauptung für  $n+1$ . Es gilt

$$(fg)^{(n+1)} = \left( (fg)^{(n)} \right)'$$

mit der Induktionsannahme

$$= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)'$$

mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= f^{(n+1)} g + fg^{(n+1)} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

Das ist, was zu zeigen war. □

**Aufgabe 2 (Übung):**

Die Funktion  $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sei durch  $g(x) = \ln(1+x)$  definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom  $T_4(g; 0)$  und zeigen Sie, dass

$$0 \leq g(x) - T_4(g; 0)(x) \leq \frac{1}{5}x^5$$

für alle  $x \geq 0$  gilt.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:**

Die Funktion  $g$  ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten fünf Ableitungen. Für alle  $x \in (-1, \infty)$  gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1+x), \\ g^{(1)}(x) &= \frac{1}{1+x}, \\ g^{(2)}(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\ g^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, \\ g^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4}, \\ g^{(5)}(x) &= \frac{24}{(1+x)^5}. \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom  $T_4(g; 0)$  ist laut der Bemerkung nach Satz 9.24 des Skriptes durch

$$T_4(g; 0)(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \ln(1) + 1x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 - \frac{6}{24}x^4 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

für alle  $x \in (-1, \infty)$  gegeben.

Sei  $x \geq 0$ . Nach dem Satz von Taylor gibt es ein  $\xi \in (0, x)$  mit

$$g(x) - T_4(g; 0)(x) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{x^5}{5} \frac{1}{(1+\xi)^5}.$$

Wegen  $0 < \frac{1}{(1+\xi)^5} < 1$  folgt

$$0 \leq g(x) - T_4(g; 0)(x) \leq \frac{1}{5}x^5.$$

**Aufgabe 3 (Übung):**

Finden Sie ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  mit  $0 \in I$  und eine differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f'(x) + x^2 f(x) = 0, \quad f(0) = 1.$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass  $f$  sich durch eine Potenzreihe darstellen lässt.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:**

Wir nehmen an, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für } x \in I = (-R, R),$$

wobei  $I = \mathbb{R}$  für  $R = \infty$ . Nun wissen wir bereits, dass  $1 = f(0) = a_0$  gelten muss. Außerdem gilt nach Satz 9.31

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Soll  $f$  nun die gegebene Gleichung erfüllen, so muss gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) + x^2 f(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n \\ &= a_1 + 2a_2x + \sum_{n=2}^{\infty} ((n+1)a_{n+1} + a_{n-2})x^n \end{aligned}$$

für jedes  $x \in I$ . Koeffizientenvergleich (vgl. Satz 9.34 im Skript) liefert, dass

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_{n+1} = -\frac{a_{n-2}}{n+1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Für  $n = 3k + 1$  und  $n = 3k + 2$  folgt somit  $a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0$ , für  $n = 3k$  folgt

$$a_{3k} = -\frac{a_{3(k-1)}}{3k} = \frac{a_{3(k-2)}}{3^2 k(k-1)} = \dots = (-1)^k \frac{a_0}{3^k k!} = \frac{(-1)^k}{3^k k!}.$$

Somit ergibt sich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{3^k k!} = e^{-\frac{x^3}{3}},$$

und da die Potenzreihe den Konvergenzradius  $\infty$  hat, können wir  $I = \mathbb{R}$  wählen.

#### Aufgabe 4 (Übung):

Es sei  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Berechnen Sie  $f^{(20)}(0)$  und  $f^{(31)}(0)$ , wobei

- (a)  $f(x) = \arctan x$ ,
- (b)  $f(x) = \log(1 - x^2)$ .

#### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- (a) Für alle  $x \in (-1, 1)$  gilt

$$f(x) = \arctan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Durch einmaliges ableiten erhalten wir

$$g(x) = (\arctan)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} x^{2m+2}.$$

Wir setzen  $a_k = (-1)^{k+1}$  für  $k \in \mathbb{N}$  gerade und  $a_k = 0$  für alle anderen  $k \in \mathbb{N}_0$ . Mit der Darstellung in Kapitel 9 Slide 57 folgt

$$f^{(20)}(0) = g^{(19)}(0) = a_{19} \cdot 19! = 0 \quad \text{und} \quad f^{(31)}(0) = g^{(30)}(0) = a_{30} \cdot 30! = -30!.$$

- (b) Für alle  $x \in (-1, 1)$  gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \log((1-x)(1+x)) \\ &= \log(1-x) + \log(1+x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n} x^n. \end{aligned}$$

Wir setzen  $a_n = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n}$  für  $n \in \mathbb{N}$  und erhalten

$$f^{(20)}(0) = 20!a_{20} = -\frac{19!}{10} \quad \text{und} \quad f^{(31)}(0) = 31! \cdot a_{31} = 0.$$

**Aufgabe 5 (Tutorium):**

Berechnen Sie die Grenzwerte

(i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x)},$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1},$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})).$

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:**

(a) Nach der Regel von l'Hospital aus (b) in Satz 9.17 der Vorlesung gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\ln(x^2+3)}^{x \rightarrow \infty \rightarrow \infty}}{\underbrace{\ln(x)}_{x \rightarrow \infty \rightarrow \infty}} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2+3}}{\frac{1}{x}} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+3} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{3}{x^2}} = 2.$$

(b) Nach der Regel von l'Hospital aus (a) in Satz 9.17 der Vorlesung gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{1+\cos(\pi x)}^{x \rightarrow 1 \rightarrow 0}}{\underbrace{x^2-2x+1}_{x \rightarrow 1 \rightarrow 0}} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} -\pi \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{\sin(\pi x)}^{x \rightarrow 1 \rightarrow 0}}{\underbrace{2x-2}_{x \rightarrow 1 \rightarrow 0}} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} -\pi^2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x)}{\underbrace{2}_{\neq 0}} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(c) Sinus ist für jedes  $x \geq 0$  auf  $[\sqrt{x}, \sqrt{x+1}]$  stetig und auf  $(\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$  differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz 9.14 des Skriptes, existiert ein  $\xi_x \in (\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$  mit

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1}) &= -(\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})) = -\cos(\xi_x)(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\ &= -\cos(\xi_x) \left( \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right) = -\cos(\xi_x) \left( \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right). \end{aligned}$$

Folglich

$$|\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})| = \underbrace{|\cos(\xi_x)|}_{\leq 1} \left| \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})) = 0.$$

**Aufgabe 6 (Tutorium):**Die Funktion  $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sei durch  $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$  definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom  $T_2(g; \frac{1}{2})$  und geben Sie eine Konstante  $C > 0$  an, für die

$$\left| g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(x) \right| \leq C \left| x - \frac{1}{2} \right|^3$$

für alle  $x \in [0, 1]$  gilt.**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:**Die Funktion  $g$  ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten drei Ableitungen. Für alle  $x \in (-1, \infty)$  gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{-x} + \frac{1}{1+x}, \\ g^{(1)}(x) &= -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}, \end{aligned}$$

$$g^{(2)}(x) = e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$g^{(3)}(x) = -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}.$$

Das Taylor-Polynom  $T_2(g; \frac{1}{2})$  ist laut Satz 9.24 des Skriptes Vorlesung durch

$$\begin{aligned} T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(x) &= \sum_{k=0}^2 \frac{g^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) - \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{4}{9}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{16}{27}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

für alle  $x \in (-1, \infty)$  gegeben.

Sei nun  $x \in [0, 1]$ . Nach dem Satz von Taylor gibt es ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $\frac{1}{2}$  mit

$$g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(x) = \frac{g^{(3)}(\xi)}{3!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = -\left(\frac{e^{-\xi}}{6} + \frac{1}{(1+\xi)^4}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right)^3.$$

Aus  $0 < \xi$  folgt

$$\left|g^{(3)}(\xi)\right| = \left|-e^{-\xi} - \frac{6}{(1+\xi)^4}\right| = e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4} \leq e^{-0} + \frac{6}{(1+0)^4} = 7,$$

wobei wir im vorletzten Schritt verwendet haben, dass beide Terme für wachsendes  $\xi$  monoton fallen. Somit gilt mit  $C := \frac{7}{6}$  wie gefordert

$$\left|g - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)\right|(x) \leq C \left|x - \frac{1}{2}\right|^3$$

für alle  $x \in [0, 1]$ .

### Aufgabe 7 (Tutorium):

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei durch  $f(x) = x^2 + 2x - 3$  definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von  $x_0 = -1$  die Funktion  $\frac{1}{f}$  darstellt.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

Gesucht ist eine Potenzreihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n$  mit Konvergenzradius  $\rho > 0$  und

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $|x+1| < \rho$ . Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\right) (x^2 + 2x - 3) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\right) ((x+1)^2 - 1 - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) ((x+1)^2 - 4) \\
&= \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} \right) - 4 \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \\
&= \left( \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (x+1)^n \right) - 4 \left( a_0 + a_1 (x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \\
&= -4a_0 - 4a_1 (x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 4a_n) (x+1)^n
\end{aligned}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x+1| < \rho$ . Sowohl die linke als die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Funktionswert einer durch eine Potenzreihe definierten Funktion. Beide Reihen haben mindestens den Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Wir dürfen also den Identitätssatz für Potenzreihen (Satz 9.34) verwenden (Koeffizientenvergleich) und schließen

$$-4a_0 = 1, \quad -4a_1 = 0, \quad \text{und} \quad a_{n-2} - 4a_n = 0 \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Damit ergibt sich induktiv:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{1}{4}, \\
a_1 &= 0, \\
a_{2n} &= \frac{1}{4} a_{2(n-1)} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, \\
a_{2n+1} &= \frac{1}{4} a_{2(n-1)+1} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_1 = 0.
\end{aligned}$$

Als Letztes müssen wir nur sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe tatsächlich einen positiven Konvergenzradius hat. Satz 7.16 liefert sofort

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{4}}}} = 2 > 0.$$

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x+1| < 2$  gilt also

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} (x+1)^{2n}.$$

*Bemerkung:* Alternativ lässt sich die Aufgabe auch über die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - \frac{\frac{1}{4}}{x+3} = -\frac{1}{8} \left( \frac{1}{1 - \frac{x+1}{2}} + \frac{1}{1 - \left(-\frac{x+1}{2}\right)} \right)$$

und die geometrischen Reihe lösen.

### Aufgabe 8 (Tutorium):

Sei  $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$  definiert. Begründen Sie, warum die Funktion  $f$  Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:

Die Funktion  $f$  ist stetig und das Intervall  $I := [-3, 2]$  ist beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz aus Abschnitt 7.44 des Skriptes, nimmt  $f$  auf  $I$  Maximum und Minimum an. Seien etwa  $x_m, x_M \in I$  mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

für alle  $x \in I$ . Sei  $x_0 \in \{x_m, x_M\}$ . Nach Definition aus Abschnitt 9.12 des Skriptes, ist  $x_0$  ein lokales Extremum. Sei  $\overset{\circ}{I} := (-3, 2)$ . Es ist klar, dass  $f$  auf  $\overset{\circ}{I}$  differenzierbar ist und

$$f'(x) = 4x^3 - 8x$$

für alle  $x \in \overset{\circ}{I}$  gilt. Ist  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ , so gilt  $f'(x_0) = 0$  nach Satz 9.13. Die Nullstellen der Ableitung sind durch

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (4x^2 - 8 = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (x^2 = 2) \Leftrightarrow x \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

für alle  $x \in \overset{\circ}{I}$  bestimmt. Durch Vergleich der Funktionswerte an den möglichen Extremalstellen

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^4 - 4 \cdot (-3)^2 + 2 = 81 - 4 \cdot 9 + 2 = 47, \\ f(-\sqrt{2}) &= f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4 \cdot (\sqrt{2})^2 + 2 = 4 - 4 \cdot 2 + 2 = -2, \\ f(0) &= 2 \quad \text{und} \\ f(2) &= 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 2 = 2 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} x_m &\in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, f(x_m) = -2 = \min\{f(x) : x \in I\}, \\ x_M &= -3, f(x_M) = 47 = \max\{f(x) : x \in I\}. \end{aligned}$$

Alternativ kann man natürlich auch über die zweite Ableitung argumentieren. Auch hier muss man natürlich den Rand mitbetrachten.