Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

1. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

Behandelt am 29. Januar 2026

Aufgabe 1 (Übung):
Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale auf geeigneten Intervallen:

a) $\int \arcsin(x)dx$.

b) $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

c) $\int (\log(x))^2dx$.

d) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

e) $\int e^x \sin(ax)dx$.

f) $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8}dx$.

Aufgabe 2 (Übung):

(a) Leiten Sie mit Hilfe partieller Integration eine Rekursionsformel für $\int \cos^n(x)dx$ mit $n \in \mathbb{N}$ her und zeigen Sie damit, dass für $k \in \mathbb{N}$

$$c_{2k} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(x)dx = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}, \qquad c_{2k+1} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(x)dx = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die *Wallissche Produktfolge*

$$w_n := \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}$$

konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst Monotonie der Folge $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und betrachten Sie dann die Folge $\left(\frac{c_{2k+1}}{c_{2k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 3 (Übung):
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

(i) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2nx^2}{(1+n^3x^2)^2}$,

(ii) $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+nx}$.

Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ und $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx$.

Aufgabe 4 (Übung):
Sei $a > 0$ und $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ stetig. Rechnen Sie nach, dass dann folgende Aussagen gelten:

(a) Ist f *gerade* (d.h. für alle $x \in [-a,a]$ gilt $f(-x) = f(x)$), so ist $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.

(b) Ist f *ungerade* (d.h. für alle $x \in [-a,a]$ gilt $f(-x) = -f(x)$), so ist $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

Aufgabe 5 (Tutorium):
Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^3 dx.$

b) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x-1| dx.$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x) dx.$

e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx.$

f) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(1+\log(x))} dx.$

g) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right) dx.$

h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

i) $\displaystyle\int_0^1 x e^{(2x^2)} \sin(e^{(x^2)}) dx.$

Hinweis zu i): Überlegen Sie sich zunächst eine Stammfunktion von $xe^{(x^2)}\sin(e^{(x^2)})$.

Erinnerung: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Es sei $f \in C(\mathbb{R})$, ferner seien $\alpha, \beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$G(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt$$

für $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $G'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7 (Tutorium):

a) Es sei $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ eine stetige, gerade Funktion (vgl. Aufgabe 4) und $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Rechnen Sie nach, dass dann

$$\int_{-r}^{r} \frac{f(x)}{e^{ax}+1} dx = \int_0^r f(x) dx$$

für jedes $r > 0$ gilt.

Hinweis: Beginnen Sie zunächst mit einer geeigneten Substitution und nutzen Sie dann die Identität

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+\frac{1}{u}} = \frac{1}{1+u} + \frac{u}{1+u} = 1$$

für $u \neq -1$.

b) Nutzen Sie Teilaufgabe a) um die nachstehenden Integrale zu bestimmen:

(i) $\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{1}{e^{ax}+1} dx.$

(ii) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{e^{ax}+1} dx.$