Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

Lösungsvorschlag zum 11. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

29. Januar 2026

Aufgabe 1 (Übung):
Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale auf geeigneten Intervallen:

a) $\displaystyle\int \arcsin(x)dx.$

b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx.$

c) $\displaystyle\int (\log(x))^2 dx.$

d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$

e) $\displaystyle\int e^x \sin(ax)dx.$

f) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8}dx.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)dx &= \int \arcsin(x)\cdot 1dx\\ &= x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

für $x \in (-1,1)$.

(b) Mit der Substitution $y(x) = \sqrt{x}$ gilt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, also $dx = 2\sqrt{x}dy = 2ydy$. Somit folgt

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int ye^y dy|_{y=\sqrt{x}}.$$

Das letzte Integral berechnen wir über partielle Integration. Es gilt

$$\int ye^y dy = ye^y - \int e^y dy = ye^y - e^y + C = (y-1)e^y + C.$$

Somit folgt insgesamt nach Resubstitution

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$$

für $x > 0$.

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Stammfunktion von log gegeben ist durch $x \mapsto x\log(x) - x$. Durch partielle Integration folgt

$$\int (\log(x))^2 dx = \int \log(x)\log(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \log(x)(x\log(x) - x) - \int \log(x) - 1dx \\
&= \log(x)(x\log(x) - x) - (x\log(x) - x - x) + C \\
&= x(\log(x))^2 - 2x\log(x) + 2x + C
\end{aligned}
$$

für $x > 0$. Alternativ können wir auch $y(x) = \log(x)$ substituieren und das so entstehende Integral über $y^2 e^y$ mit partieller Integration berechnen.

(d) Für $x \in (-1, 1)$ folgt mit partieller Integration

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int (1-x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = (1-x)\arcsin(x) + \int \arcsin(x)dx.$$

Mit Teil (a) folgt demnach

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = (1-x)\arcsin(x) + x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C = \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

(e) Mit zweimaliger partieller Integration folgt

$$
\begin{aligned}
\int e^x \sin(ax)dx &= e^x \sin(ax) - a\int e^x \cos(ax)dx \\
&= e^x \sin(ax) - ae^x \cos(ax) - a^2 \int e^x \sin(ax)dx.
\end{aligned}
$$

Addieren wir auf beiden Seiten das letzte Integral und dividieren durch $1 + a^2$, so erhalten wir

$$\int e^x \sin(ax)dx = \frac{e^x}{1+a^2}(\sin(ax) - a\cos(ax)) + C$$

für $x \in \mathbb{R}$.

(f) Es gilt

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx - \frac{3}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2}+1)^2+1}dx.$$

Im erste Integral erkennen wir im Zähler die Ableitung des Nenners, weswegen eine Stammfunktion durch $x \mapsto \log(x^2+4x+8)$ gegeben ist (eine Substitution $y(x) = x^2 + 4x + 8$ macht dies deutlich). Im zweiten Integral substituieren wir $y(x) = \frac{x}{2} + 1$ mit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$, also $dx = 2dy$. Somit folgt

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8}dx &= \log(x^2+4x+8) + C - \frac{3}{2}\int \frac{1}{y^2+1}dy\Big|_{y=\frac{x}{2}+1} \\
&= \log(x^2+4x+8) - \frac{3}{2}\arctan\Big(\frac{x}{2}+1\Big) + C
\end{aligned}
$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Der Ausdruck $x^2 + 4x + 8$ ist positiv für alle $x \in \mathbb{R}$. Stünde im Nenner des ersten Integrals ein Ausdruck, der (auch) negativ sein kann, so müsste man die Nullstellen für die Stammfunktion natürlich ausschließen und die Stammfunktion in den restlichen Punkten wäre durch den Logarithmus des Betrags gegeben, wie man anhand einer Fallunterscheidung erkennt.

Aufgabe 2 (Übung):

(a) Leiten Sie mit Hilfe partieller Integration eine Rekursionsformel für $\int \cos^n(x)dx$ mit $n \in \mathbb{N}$ her und zeigen Sie damit, dass für $k \in \mathbb{N}$

$$c_{2k} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(x)dx = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}, \qquad c_{2k+1} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(x)dx = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die *Wallissche Produktfolge*

$$w_n := \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

konvergiert und $\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst Monotonie der Folge $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und betrachten Sie dann die Folge $\left(\frac{c_{2k+1}}{c_{2k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Wir mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int \cos^n(x)dx &= \int \cos^{n-1}(x)\cos(x)dx \\ &= \cos^{n-1}(x)\sin(x) - (n-1)\int \cos^{n-2}(x)(-\sin(x))\cdot\sin(x)dx \\ &= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))dx \\ &= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)dx - (n-1)\int \cos^n(x)dx.\end{aligned}$$

Bringen wir den letzten Summanden auf die linke Seite und dividieren durch n, so erhalten wir die Rekursionsformel

$$\int \cos^n(x)dx = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx.$$

Da der erste Term für die Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ entfällt für $n \geq 2$, ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(x)dx &= \frac{2k-1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(k-1)}(x)dx = \cdots \\ &= \prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(x)dx \\ &= \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(x)dx &= \frac{2k}{2k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(k-1)+1}(x)dx = \cdots \\ &= \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx \\ &= \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}\end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$.

(b) Aus

$$c_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(x)dx,$$

so folgt

$$w_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}\frac{2k}{2k-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}}{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}} = \frac{\pi}{2}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1.$$

Wegen $\cos(x) \in [0,1]$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ folgt $\cos^{2n}(x) \geq \cos^{2n+1} \geq \cos^{2n+2}(x)$ auf diesem Intervall, was wegen der Monotonie des Integrals $c_{2n} \geq c_{2n+1} \geq c_{2n+2}$ liefert. Deshalb folgt

$$1 \geq \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \geq \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} \to 1 \quad \text{für } n \to \infty,$$

was nach dem Sandwichprinzip die Behauptung liefert.

Aufgabe 3 (Übung):
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

(i) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2nx^2}{(1+n^3x^2)^2}$,

(ii) $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+nx}$.

Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ und $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) Wir beobachten, dass für jedes $x \in [0,1]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2}\left|\frac{2n^3x^2}{(1+n^3x^2)^2}\right| = \frac{1}{n^2}\left|g(n^3x^2)\right| \leq \frac{1}{n^2}\|g\|_\infty,$$

wobei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{2y}{(1+y)^2}$. Wegen

$$\left|\frac{2y}{(1+y)^2}\right| = 1 - \frac{y^2+1}{(1+y)^2} \leq 1,$$

für all $y \in [0,\infty)$ ist $\|g\|_\infty \leq 1$. Also ist $f_n \to 0$ auf $[0,1]$ für $n \to \infty$. Nach Satz im Abschnitt 10.28 des Skriptes gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

(ii) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+nx}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[\ln(1+nx)]_{x=0}^1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(1+n)}^{\to\infty}}{\underbrace{n}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+n}}{\underbrace{1}_{\neq 0}} = 0.$$

Aufgabe 4 (Übung):
Sei $a > 0$ und $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ stetig. Rechnen Sie nach, dass dann folgende Aussagen gelten:

(a) Ist f *gerade* (d.h. für alle $x \in [-a,a]$ gilt $f(-x) = f(x)$), so ist $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.

(b) Ist f *ungerade* (d.h. für alle $x \in [-a,a]$ gilt $f(-x) = -f(x)$), so ist $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Wir halten zunächst fest, dass in beiden Aufgabenteilen, f stetig auf $[-a,a]$ ist, und daher alle vorkommenden Integrale erklärt sind.

(a) Nach Abschnitt 10.5 der Vorlesung (Linearität des Integrals in den Integrationsgrenzen) gilt

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt$$

Wir substituieren im ersten Integral nun $s = -t$, d.h. $t = -s$. Es folgt $dt = -ds$ und $-a = t(a)$ sowie $0 = t(0)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(t)dt &= \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{0} -f(-s)ds|_{t=-s} + \int_{0}^{a} f(t)dt \\ &\overset{f \text{ gerade}}{=} \int_{0}^{a} f(s)ds + \int_{0}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Integrationsvariable s in t umbenannt wurde.

(b) Nach Abschnitt 10.5 der Vorlesung (Linearität des Integrals in den Integrationsgrenzen) gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$$

Wir substituieren im ersten Integral nun $s = -t$, d.h. $t = -s$. Es folgt $dt = -ds$ und $-a = t(a)$ sowie $0 = t(0)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(t)dt &= \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{0} -f(-s)ds|_{t=-s} + \int_{0}^{a} f(t)dt \\ &\overset{f \text{ ungerade}}{=} \int_{0}^{a} -f(s)ds + \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t) - f(t)dt = 0\end{aligned}$$

und wieder haben wir im letzten Schritt die Integrationsvariable s in t umbenannt.

Aufgabe 5 (Tutorium):
Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^3 dx.$

b) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x-1| dx.$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x) dx.$

e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx.$

f) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(1+\log(x))} dx.$

g) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right) dx.$

h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

i) $\displaystyle\int_0^1 x e^{(2x^2)} \sin(e^{(x^2)}) dx.$

Hinweis zu i): Überlegen Sie sich zunächst eine Stammfunktion von $xe^{(x^2)}\sin(e^{(x^2)})$.

Erinnerung: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Entweder wir erkennen direkt die Funktion $x \mapsto \frac{1}{8}(1+2x)^4$ als Stammfunktion des Integranden, oder wir nutzen die Substitution $y(x) = 1+2x$ (also $\frac{dy}{dx} = 2$, was $dx = \frac{1}{2}dy$ liefert, sowie $y(0) = 1$, $y(1) = 3$). Damit folgt

$$\int_0^1 (1+2x)^3 dx = \frac{1}{2}\int_1^3 y^3 dy|_{y=1+2x} = \frac{1}{8}y^4\Big|_1^3 = \frac{81-1}{8} = 10.$$

(b) Wir teilen das Integral auf, um den Betrag aufzulösen. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x-1| dx &= \int_{-2}^1 1-x dx + \int_1^2 x-1 dx = \left(x-\tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^1 + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^2 \\ &= \left(1-\tfrac{1}{2}\right) - (-2-2) + (2-2) - \left(\tfrac{1}{2}-1\right) = 5.\end{aligned}$$

(c) Mit der Substitution $y(x) = \arcsin(x)$ gilt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, also $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dy$, sowie $y(0) = 0$, $y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Es folgt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} y dy|_{y=\arcsin(x)} = \tfrac{1}{2}y^2\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{72}.$$

(d) Mit $y(x) = \sin(x)$ gilt $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$, also $\cos(x)dx = dy$, sowie $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Es folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x) dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y dy|_{y=\sin(x)} = \tfrac{1}{2}y^2\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}.$$

(e) Mit $y(x) = \sqrt{x}$ gilt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, also $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dy$, sowie $y(1) = 1$, $y(4) = 2$. Es folgt

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx = 2\int_1^2 \frac{1}{1+y} dy|_{y=\sqrt{x}} = 2\log(1+y)\Big|_1^2 = \log(3) - \log(2) = 2\log(\tfrac{3}{2}).$$

(f) Mit $y(x) = \log x$ gilt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, also $\frac{1}{x}dx = dy$, sowie $y(1) = 0$, $y(e) = 1$. Es folgt

$$\int_1^e \frac{1}{x(1+\log(x))} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+y} dy|_{y=\log(x)} = \log(1+y)\Big|_0^1 = \log(2) - \log(1) = \log(2).$$

(g) Mit $y(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$ gilt $\sqrt{x} = y(x)^2 + 1$ sowie $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{4(y^2+1)y}$, also $dx = 4y(y^2+1)dy$, sowie $y(1) = 0$, $y(4) = 1$. Es folgt

$$\int_1^4 \arctan(\sqrt{\sqrt{x}-1})dx = \int_0^1 (4y^3 + 4y)\arctan(y)dy\big|_{y=\sqrt{\sqrt{x}-1}}.$$

Dieses Integral berechnen wir mit Hilfe partieller Integration.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (4x^3+4x)\arctan(x)dx &= (x^4+2x^2)\arctan(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^4+2x^2}{1+x^2}dx \\
&= \frac{3\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(1+x^2)^2-1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{3\pi}{4} - \int_0^1 (1+x^2)dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{3\pi}{4} - (x+\tfrac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 + \arctan(x)\Big|_0^1 \\
&= \frac{3\pi}{4} - \frac{4}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

(h) Durch scharfes Hinsehen erkennen wir, dass $x \mapsto -\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ ist. Deshalb folgt mit partieller Integration, dass

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx \\
&= \int_1^2 x^2 \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\Big|_1^2 + 2\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx \\
&= -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_1^2 = -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

(i) Durch scharfes Hinsehen erkennen wir, dass $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(e^{(x^2)})$ eine Stammfunktion von $x \mapsto xe^{(x^2)}\sin(e^{(x^2)})$ ist. Deshalb folgt mit partieller Integration, dass

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{2x^2}\sin(e^{x^2})dx &= \int_0^1 e^{(x^2)}xe^{(x^2)}\sin(e^{(x^2)})dx \\
&= -\tfrac{1}{2}\cos(e^{(x^2)})e^{(x^2)}\Big|_0^1 + \int_0^1 xe^{(x^2)}\cos(e^{(x^2)})dx \\
&= -\tfrac{1}{2}\cos(e)e + \tfrac{1}{2}\cos(1) + \tfrac{1}{2}\sin(e^{(x^2)})\Big|_0^1 \\
&= \tfrac{1}{2}(\cos(1) - \sin(1) + \sin(e) - e\cos(e)).
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (Tutorium):
Es sei $f \in C(\mathbb{R})$, ferner seien $\alpha, \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$G(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$$

für $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $G'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:
Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\gamma(x)} f(t)dt = f(\gamma(x))\gamma'(x)$$

für alle differenzierbaren $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Somit folgt aus

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = \int_0^{\beta(x)} f(t)dt - \int_0^{\alpha(x)} f(t)dt,$$

dass

$$G'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

Aufgabe 7 (Tutorium):

a) Es sei $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ eine stetige, gerade Funktion (vgl. Aufgabe 4) und $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Rechnen Sie nach, dass dann

$$\int_{-r}^{r} \frac{f(x)}{e^{ax}+1}dx = \int_0^r f(x)dx$$

für jedes $r > 0$ gilt.

Hinweis: Beginnen Sie zunächst mit einer geeigneten Substitution und nutzen Sie dann die Identität

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+\frac{1}{u}} = \frac{1}{1+u} + \frac{u}{1+u} = 1$$

für $u \neq -1$.

b) Nutzen Sie Teilaufgabe a) um die nachstehenden Integrale zu bestimmen:

(i) $\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{1}{e^{ax}+1}dx.$ (ii) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{e^{ax}+1}dx.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

a) Wir setzen zunächst

$$I = \int_{-r}^{r} \frac{f(x)}{e^{ax}+1}dx.$$

Substituieren wir $x = -y$, so erhalten wir

$$I = \int_{y(-r)=r}^{y(r)=-r} \frac{f(-y)}{1+e^{-ay}}(-1)dy|_{y=-x} = \int_{-r}^{r} \frac{f(-y)}{1+e^{-ay}}dy|_{y=-x} = \int_{-r}^{r} \frac{f(y)}{1+e^{-ay}}dy,$$

wobei wir im zweiten Schritt die Integrationsgrenzen getauscht haben und im letzten Schritt verwendet haben, dass f gerade ist. Ersetzen wir nun y durch x und kombinieren den letzten Ausdruck mit I, dann erhalten wir

$$2I = \int_{-r}^{r} f(x)\left(\frac{1}{1+e^{ax}} + \frac{1}{1+e^{-ax}}\right)dx = \int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\int_0^r f(x)dx,$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Identiät aus dem Hinweis für $u = e^{ax}$ verwendet haben.

a) Mit der Identität aus Teil a) ergibt sich schnell, dass

$$\text{(i)} \int_{-r}^{r} \frac{1}{e^{ax}+1}dx = \int_0^r dx = r,$$

$$\text{(ii)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{e^{ax}+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 1.$$