

## Lösungsvorschlag zum 12. Übungsblatt

### Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26  
5. Februar 2026

#### Aufgabe 1 (Übung):

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des Anfangswertproblems

$$u'(t) = t\sqrt{1 - u(t)^2}, \quad u(0) = u_0 \in [-1, 1].$$

Für welche  $u_0$  ist es eindeutig lösbar?

#### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

Bei der DGL handelt es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen (siehe Kapitel 11 Slide 51 des Skriptes). Betrachte zunächst den **Fall  $|u_0| < 1$** : Wir bringen alle  $u$ -Abhängigkeiten auf eine Seite und erhalten

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{\sqrt{1 - u^2(s)}} ds = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta = \int_0^t s ds,$$

wobei wir  $\eta = u(t)$  substituiert haben, was zu " $d\eta = u'(t)dt$ " führt. Auswertung der Integrale liefert

$$\arcsin(u(t)) - \arcsin(u_0) = [\arcsin(\eta)]_{\eta=u_0}^{u(t)} = \frac{t^2}{2}$$

und wir erhalten durch Auflösen nach  $u$  folgenden Ausdruck

$$(1) \quad u(t) = \sin\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right).$$

Diese Lösungsformel kann nicht für alle  $t \in \mathbb{R}$  gültig sein, denn wegen der DGL muss  $u$  monoton wachsend für  $t \geq 0$  und monoton fallend für  $t \leq 0$  sein. Tatsächlich gilt sie auf dem größten Intervall  $I$ , welches die Startstelle 0 enthält und auf dem  $\sqrt{1 - u^2}$  nicht verschwindet (vgl. Kapitel 11 Slide 51 des Skriptes), also genau dann, wenn  $|u(t)| < 1$ . Der Sinus nimmt den Wert 1 an, wenn  $\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0) = \frac{\pi}{2}$  also bei  $a := \sqrt{\pi - 2\arcsin(u_0)} = |t|$ . Für das größte Intervall finden wir daher  $I = (-a, a)$ . Wegen der erwähnten Monotonie, ist

$$(2) \quad u(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right) & \text{falls } |t| < a, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  der einzige Kandidat für eine maximale Lösung des AWP's. Tatsächlich ist die Fortsetzung in  $a$  stetig und wegen

$$\lim_{t \rightarrow a-} u'(t) = \lim_{t \rightarrow a-} t \cos\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right) = \underbrace{a \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0 = \lim_{t \rightarrow a+} u'(t)$$

differenzierbar, wobei wir die obige Definition von  $a$  im zweiten Schritt verwendet haben. Wegen Symmetrie gilt das auch für  $-a$ . Schließlich ist die DGL auf ganz  $\mathbb{R}$  erfüllt.

**Falls  $u_0 = 1$** , so ist  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $t \mapsto 1$  die eindeutige, maximale Lösung des Anfangswertproblems. Eindeutigkeit dieser Lösung sieht man wie folgt: Angenommen es existiert eine weitere Lösung  $\tilde{u} : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{u}(0) = 1$ . Aufgrund der zuvor genannten Monotonie der Lösung (d.h. für  $t \leq 0$  ist die Funktion

monoton fallend und für  $t \geq 0$  ist sie monoton wachsend) hat die Lösung ein globales Minimum  $u_0 = 1$  in  $t = 0$ . Also gilt tatsächlich  $\tilde{u} = u|_I \equiv 1$ .

**Falls  $u_0 = -1$ ,** so ist  $u \equiv -1$  eine maximale Lösung des AWP's. Falls eine Lösung von dieser Konstanten (nach oben) abweicht, kann man ihre Gestalt wieder mit der Trennung der Veränderlichen berechnen (siehe den Fall  $|u_0| < 1$ ).

Wir wollen nun die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung  $u'(t) = t\sqrt{1-u(t)^2}$  mit Anfangsbedingung  $u(0) = -1$  finden. Lösen wir die Differentialgleichung durch Trennung der Variablen für  $t_1 < t_2$ , so erhalten wir

$$\arcsin(u(t_2)) - \arcsin(u(t_1)) = \frac{t_2^2}{2} - \frac{t_1^2}{2}.$$

Mit der Anfangsbedingung  $u(t_1) = 1$  und  $t \leq 0$  folgt

$$u(t) = \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Da  $u$  für  $t \leq 0$  monoton fallend ist, existiert diese Lösung maximal bis sie den Wert  $-1$  erreicht. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} + \frac{\pi}{2} \stackrel{!}{=} \frac{3\pi}{2},$$

also wenn  $t^2 = t_1^2 + 2\pi$ . Damit existiert diese Lösung nur für  $t \geq -\sqrt{t_1^2 + 2\pi}$ . Analog erhält man für die Anfangsbedingung  $u(t_1) = -1$  und  $t \geq 0$  die Lösung

$$u(t) = \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right).$$

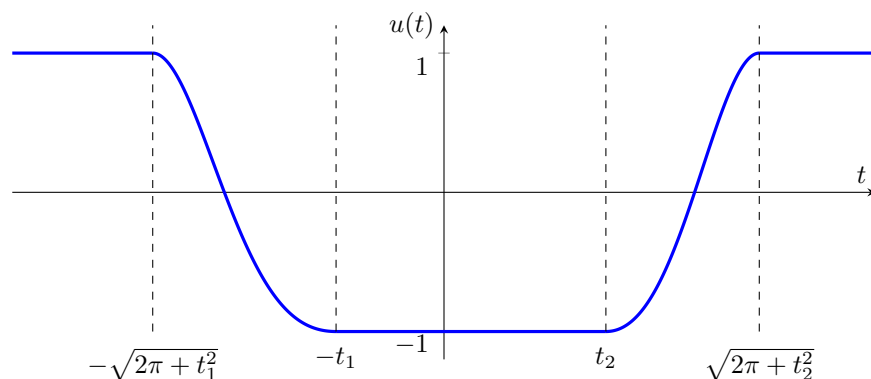
Da  $u$  für  $t \geq 0$  monoton wachsend ist, existiert diese Lösung maximal bis sie den Wert  $1$  erreicht. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} - \frac{\pi}{2} \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2},$$

also wenn  $t^2 = t_1^2 + 2\pi$ . Folglich existiert diese Lösung nur für  $t \leq \sqrt{t_1^2 + 2\pi}$ . Somit hat jede Lösung die Gestalt

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq -\sqrt{2\pi + t_1^2}, \\ \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } -\sqrt{2\pi + t_1^2} < t \leq -t_1, \\ -1 & \text{für } -t_1 < t \leq t_2, \\ \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_2^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } t_2 < t \leq \sqrt{2\pi + t_2^2}, \\ 1 & \text{für } \sqrt{2\pi + t_2^2} \leq t \end{cases}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit beliebigen Konstanten  $t_1, t_2 \in [0, \infty]$ .



**Aufgabe 2 (Übung):**

Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

(i)  $y' = e^y \sin(x), \quad y(0) = -\log(3).$

(ii)  $y' = 2xy + x, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

(iii)  $y' = xe^{-x}y^2, \quad y(0) = 1.$

(iv)  $y' = \left(x + \frac{2}{1+x^2}\right)y, \quad y(0) = 1.$

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:**

- (i) Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal (vgl. Kapitel 11 Slide 51 des Skriptes)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^y \sin(x) \\ \Rightarrow \int_{-\log(3)}^{y(x)} e^{-\eta} d\eta &= \int_0^x \sin(\xi) d\xi \\ \Rightarrow -[e^{-\eta}]_{\eta=-\log(3)}^{y(x)} &= -[\cos(\xi)]_{\xi=0}^x \\ \Leftrightarrow y(x) &= -\log(2 + \cos(x)). \end{aligned}$$

Also ist  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\log(2 + \cos(x))$  die maximale Lösung des AWP.

- (ii) Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung (siehe Kapitel 11 Slide 46 des Skriptes). Die zugehörige homogene Gleichung
- $y' = a(x)y$
- in diesem Fall lautet
- $y' = 2xy$
- , wobei also
- $a(x) = 2$
- . Berechne gemäß Satz 10.2 die Stammfunktion

$$A(x) := \int_0^x 2t dt = x^2,$$

Die Lösungen der homogenen Gleichung sind gegeben durch  $y(x) = ce^{x^2}$  für  $c \in \mathbb{R}$ . Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir durch Variation der Konstanten. Als Ansatz wählen wir dazu  $y_p(x) = c(x)e^{x^2}$ . Es gilt  $y_p \in \mathcal{L}$  genau dann, wenn gilt

$$2xc(x)e^{x^2} + x = y_p'(x) = c'(x)e^{A(x)} + c(x) \cdot A'(x)e^{A(x)} = c'(x)e^{x^2} + 2x \cdot c(x) \cdot e^{x^2}$$

und damit wenn  $c'(x) = xe^{-x^2}$  gilt. Integration liefert

$$c(x) = \int_0^x te^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_{t=0}^x = \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2}).$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^{x^2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})e^{x^2}.$$

Mit dem Anfangswert  $\frac{1}{2} = y(0) = c$  ergibt sich somit

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}(e^{x^2} - 1) = e^{x^2} - \frac{1}{2}.$$

- (iii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= xe^{-x}y^2 \\ \Rightarrow \int_1^{y(x)} \frac{1}{\eta^2} d\eta &= \int_0^x \xi e^{-\xi} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\left[\frac{1}{\eta}\right]_{\eta=1}^{y(x)} &= -[\xi e^{-\xi}]_{\xi=0}^x + \int_0^x e^{-\xi} d\xi = -[\xi e^{-\xi}]_{\xi=0}^x - [e^{-\xi}]_{\xi=0}^x \\ \Rightarrow -\frac{1}{y(x)} + 1 &= -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \\ \Leftrightarrow y(x) &= \frac{e^x}{1+x}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $x \in I = (-1, \infty)$  das größte Intervall mit  $0 \in I$  und  $y(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ .

Dieses  $y$  ist die maximale Lösung, denn  $y$  lässt sich wegen  $\lim_{x \rightarrow -1^+} y(x) = \infty$  nicht stetig nach links fortsetzen.

- (iv) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung (siehe Kapitel 11 Slide 46 des Skriptes).

! Bei dieser Art von DGL (d.h. DGLs der Form  $y' = a(x)y$ ) sollte **nicht** Trennung der Variablen verwendet werden. Stattdessen sollte man den Faktor  $a$  integrieren um so auf die gesuchte Lösung  $y(x) = c \cdot \exp\left(\int_0^x a(\tilde{x})d\tilde{x}\right)$  mit  $c \in \mathbb{R}$  zu kommen (vgl. Satz 10.2).

Integrieren von  $a(x)$  liefert

$$A(x) := \int_0^x s + \frac{2}{1+s^2} = \left[ \frac{1}{2}s^2 + 2 \arctan(s) \right]_{s=0}^x = \frac{x^2}{2} + 2 \arctan(x).$$

Nach Satz 10.2 (1) ist

$$y(x) = ce^{\frac{x^2}{2} + 2 \arctan(x)}$$

eine Lösung. Mit der Anfangsbedingung  $1 = y(0) = c$  ist dann also

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 2 \arctan(x)}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

### Aufgabe 3 (Übung):

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertprobleme:

- (i)  $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , mit  $y(0) = y'(0) = 0$ , sowie  
(ii)  $y'' - 2y' + y = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , mit  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = 2$ .

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

- (i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Kapitel 11 Slide 60 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  gegeben und hat genau die Nullstellen  $\lambda_1 = (-1 - i)$  und  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = (-1 + i)$ , jeweils mit Vielfachheit eins. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet daher

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ , mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Für eine partikuläre Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“ (vgl. Kapitel 11 Slide 66)

$$y_p(x) = xe^{-x}[C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)],$$

hier sind  $\alpha = -1, \beta = 1, m = 0, \nu = 1$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= e^{-x}[-(C_1 x \cos(x) + C_2 x \sin(x)) + (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) \\ &\quad + (-x C_1 \sin(x) + x C_2 \cos(x))] \\ &= e^{-x}[C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + (C_2 - C_1)x \cos(x) - (C_1 + C_2)x \sin(x)], \\ y_p''(x) &= e^{-x}[-(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + (C_2 - C_1)x \cos(x) - (C_1 + C_2)x \sin(x)) \\ &\quad + (-C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)) + (C_2 - C_1)(\cos(x) - x \sin(x)) \\ &\quad - (C_1 + C_2)(\sin(x) + x \cos(x))] \\ &= e^{-x}[2(C_2 - C_1) \cos(x) - 2(C_1 + C_2) \sin(x) - 2C_2 x \cos(x) + 2C_1 x \sin(x)]. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p''(x) + 2y_p'(x) + 2y_p(x) &= e^{-x} \cos(x) \\ \Leftrightarrow (2(C_2 - C_1) \cos(x) - 2(C_1 + C_2) \sin(x) - 2C_2 x \cos(x) + 2C_1 x \sin(x)) \\ &\quad + 2(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + (C_2 - C_1)x \cos(x) - (C_1 + C_2)x \sin(x)) \\ &\quad + 2(C_1 x \cos(x) + C_2 x \sin(x)) &= \cos(x) \\ \Leftrightarrow 2C_2 \cos(x) - 2C_1 \sin(x) &= \cos(x) \\ \Leftrightarrow (2C_2 - 1) \cos(x) - 2C_1 \sin(x) &= 0. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt  $C_1 = 0$  und  $C_2 = \frac{1}{2}$ . Damit ist  $y_p(x) = \frac{x}{2} \sin(x)e^{-x}$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x) + \frac{x}{2} \sin(x)e^{-x}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= \left[ C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x) + \frac{x}{2} \sin(x)e^{-x} \right]_{x=0} = C_1 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow C_1 &= 0, \\ y'(0) &= \left[ C_2 e^{-x} (\cos(x) - \sin(x)) + \frac{1}{2} e^{-x} (-x \sin(x) + \sin(x) + x \cos(x)) \right]_{x=0} = C_2 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Also ist  $y = y_p$  die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

- (ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Kapitel 11 Slide 60 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  gegeben und hat genau eine doppelte Nullstelle  $\lambda_1 = 1$ . Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet daher

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Für eine partikuläre Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“ (vgl. Kapitel 11 Slide 66)

$$y_p(x) = C x^2 e^x,$$

hier sind  $\alpha = 1, \beta = 0, m = 0, \nu = 2$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= C e^x (x^2 + 2x), \\ y_p''(x) &= C e^x (x^2 + 2x + 2x + 2) \end{aligned}$$

$$= Ce^x(x^2 + 4x + 2).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) &= e^x \\ \Leftrightarrow C((x^2 + 4x + 2) - 2(x^2 + 2x) + x^2) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2C &= 1 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist  $y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^x$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{x^2}{2}e^x,$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= \left[ C_1e^x + C_2xe^x + \frac{x^2}{2}e^x \right]_{x=0} = C_1 \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow C_1 &= 1, \\ y'(0) &= \left[ e^x + C_2(x+1)e^x + \left( \frac{x^2}{2} + x \right) e^x \right]_{x=0} = 1 + C_2 \stackrel{!}{=} 2 \\ \Rightarrow C_2 &= 1. \end{aligned}$$

Also die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems durch  $y(x) = e^x \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} \right)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gegeben.

#### Aufgabe 4 (Tutorium):

Bestimmen Sie die maximale Lösung der Anfangswertprobleme:

- (i)  $y' = -y^2$ , mit  $y(0) = -1$ .
- (ii)  $y' = y + x + 1$ , mit  $y(0) = 0$ .
- (iii)  $y' = \frac{\sin(y)}{x}$ , mit  $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ .
- (iv)  $y' = -\frac{2}{1-x}y + \frac{1}{1-x}$ , mit  $y(0) = 0$ .

#### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- (i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -y^2 \\ \Rightarrow \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{\eta^2} d\eta &= - \int_0^x d\xi \\ \Rightarrow -\frac{1}{y(x)} - 1 &= - \left[ \frac{1}{\eta} \right]_{\eta=-1}^{y(x)} = -x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y(x)} &= x - 1 \\ \Leftrightarrow y(x) &= \frac{1}{x - 1}. \end{aligned}$$

Die obige Formel gilt auf dem größten Intervall  $I$  mit  $0 \in I$ ,  $-(y(x))^2 \neq 0$  und  $x - 1 < 0$  für alle  $x \in I$  — also  $I = (-\infty, 1)$ . Wegen  $\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = -\infty$ , ist  $y$  nicht weiter nach rechts fortsetzbar und  $I$  ist das maximale Existenzintervall.

- (ii) Die Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung. Die homogene Gleichung lautet  $y' = y$  mit  $a(x) = 1$ . Wir berechnen gemäß Satz 10.2 die Stammfunktion

$$A(x) := \int_0^x 1 d\xi = x.$$

Die Lösungen der homogenen Gleichung sind dann also gegeben durch  $y(x) = ce^x$  für  $c \in \mathbb{R}$ . Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir durch das Prinzip der Variation der Konstanten. Als Ansatz wählen wir dazu  $y_p(x) = c(x)e^x$ . Es gilt  $y_p \in \mathcal{L}$  genau dann, wenn gilt

$$c(x)e^x + x + 1 = y_p'(x) = c'(x)e^{A(x)} + c(x) \cdot A'(x)e^{A(x)} = c'(x)e^x + c(x)e^x$$

und damit wenn  $c'(x) = (1+x)e^{-x}$ . Integration liefert

$$c(x) = \int_0^x (1+t)e^{-t} dt = [-e^{-x}(x+2)]_{t=0}^x = 2 - e^{-x}(x+2).$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^x + (2 - e^{-x}(x+2))e^x = ce^x + 2e^x - x - 2$$

Mit dem Anfangswert  $y(0) = 0$  ergibt sich somit

$$y(x) = 2e^x - x - 2.$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

- (iii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\sin(y)}{x} \\ \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{y(x)} \frac{1}{\sin(\eta)} d\eta &= \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{\xi} d\xi \\ \Leftrightarrow \left[ \log\left(\tan\left(\frac{\eta}{2}\right)\right) \right]_{\eta=\frac{\pi}{2}}^{y(x)} &= [\log(\xi)]_{\xi=\frac{1}{2}}^x \\ \Leftrightarrow \log\left(\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right)\right) &= \log(2x) \\ (3) \quad \Leftrightarrow y(x) &= 2 \arctan(2x). \end{aligned}$$

Das Integral auf der linken Seite der zweiten Zeile wird mit

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

beziehungsweise

$$\sin(\eta) = \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

wie folgt gelöst

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{y(x)} \frac{1}{\sin(\eta)} d\eta &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{y(x)} \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)} d\eta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{y(x)} \frac{1}{2 \tan\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)} d\eta \\ &= \int_{u(\pi/2)}^{u(y(x))} \frac{1}{u} du = \log\left(\frac{\eta}{2}\right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{y(x)}{2}}, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt  $\sin(x) = \tan(x) \cos(x)$  verwendet und im vierten Schritt  $u = \tan(\eta/2)$  substituiert haben. Die Formel (3) gilt auf dem größten Intervall  $I$  mit  $\frac{\pi}{2} \in I$ ,  $\sin(y(x)) \neq 0$  und  $0 < x$  für alle  $x \in I$  (letzte Einschränkung kommt von der DGL). Wegen

$$0 < y(x) = 2 \arctan(2x) < \pi$$

ist  $I = (0, \infty)$ . Dies ist das maximale Existenzintervall.

- (iv) Die Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung und die homogene Gleichung lautet  $y' = -\frac{2}{1-x}y$  mit  $a(x) = -\frac{2}{1-x}$ . Wir berechnen gemäß Satz 10.2 die Stammfunktion

$$A(x) := -2 \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = [-2 \log(t-1)]_0^x = 2 \log(x-1).$$

Die Lösungen der homogenen Gleichung sind dann durch  $y(x) = ce^{2 \log(1-x)}$  mit  $c \in \mathbb{R}$  gegeben. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir durch Variation der Konstanten. Als Ansatz wählen wir dazu  $y_p = c(x)e^{2 \log(1-x)}$ . Es gilt  $y_p \in \mathcal{L}$  genau dann, wenn gilt

$$-\frac{2}{1-x}c(x)e^{2 \log(x-1)} + \frac{1}{1-x} = y_p'(x) = c'(x)e^{2 \log(x-1)} + c(x) \cdot \left(-\frac{2}{1-x}\right) \cdot e^{2 \log(x-1)}$$

und damit dann wenn  $c'(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ . Integration liefert

$$c(x) = \int_0^x \frac{1}{(1-t)^3} dt = \left[ \frac{1}{2(t-1)^2} \right]_0^x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(1-x)^2} - 1 \right).$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} y(x) = y_h(x) + y_p(x) &= ce^{2 \log(x-1)} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(1-x)^2} - 1 \right) e^{2 \log(x-1)} \\ &= c(x-1)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(1-x)^2} - 1 \right) (1-x)^2 \\ &= c(1-x)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-x)^2. \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung  $0 = y(0) = c$  folgt

$$y(x) = \frac{1 - (1-x)^2}{2}$$

für alle  $x \in (-\infty, 1)$ .

### Aufgabe 5 (Tutorium):

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertprobleme:

- (i)  $y'' + y' + \frac{y}{4} = e^{-\frac{x}{2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , mit  $y(0) = y'(0) = 1$ , sowie  
(ii)  $y'' - 2y' = -2x + \sin(2x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , mit  $y(0) = \frac{1}{8}$  und  $y'(0) = 0$ .

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

- (i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Kapitel 11 Slide 60 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4}$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  gegeben und hat genau eine doppelte Nullstelle  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ . Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y_h(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}},$$

für alle mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Für eine partikuläre Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“ (siehe Kapitel 11 Slide 66)

$$y_p(x) = Cx^2 e^{-\frac{x}{2}}$$

Hierbei sind  $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 0, m = 0, \nu = 2$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ce^{-\frac{x}{2}} \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right), \\ y_p''(x) &= Ce^{-\frac{x}{2}} \left( (2-x) - \frac{1}{2} \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right) \right) \\ &= Ce^{-\frac{x}{2}} \left( \frac{x^2}{4} - 2x + 2 \right). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p''(x) + y_p'(x) + \frac{y_p(x)}{4} &= e^{-\frac{x}{2}} \\ \stackrel{e^{-\frac{x}{2}} \neq 0}{\Leftrightarrow} C \left( \left( \frac{x^2}{4} - 2x + 2 \right) + \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{x^2}{4} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2C &= 1 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist  $y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x}{2}}$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x}{2}},$$

für all  $x \in \mathbb{R}$  mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= \left[ C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right]_{x=0} = C_1 \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow C_1 &= 1, \\ y'(0) &= \left[ -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} + C_2 \left( 1 - \frac{x}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}} + \left( -\frac{x^2}{4} + x \right) e^{-\frac{x}{2}} \right]_{x=0} = C_2 - \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \left( 1 + \frac{3x + x^2}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

- (ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Kapitel 11 Slide 60 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  gegeben und hat genau die Nullstellen  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = 2$ , jeweils mit Vielfachheit eins. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y_1(x) = C_1 + C_2 e^{2x},$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Setze  $f_1(x) = -2x$ ,  $f_2(x) = \sin(2x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Bestimme partikuläre Lösungen für die Inhomogenitäten  $f_1$  bzw.  $f_2$  jeweils durch einen Ansatz „von der Form der rechten Seite“.

- $f_1$  (Nullstelle des charakteristischen Polynoms): Mache Ansatz

$$y_p^{(1)}(x) = x(a_0 + a_1 x) = a_0 x + a_1 x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
 y_p^{(1)''}(x) - 2y_p^{(1)'}(x) &= f_1(x) \Leftrightarrow 2a_1 - 2a_0 - 4a_1x = -2x \\
 \text{Koeff.-Vergleich} \Leftrightarrow -4a_1 &= -2 \quad \wedge \quad 2a_1 - 2a_0 = 0 \\
 a_1 &= \frac{1}{2} \quad \wedge \quad a_0 = a_1 = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Also ist  $y_p^{(1)}(x) = \frac{x(1+x)}{2}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  eine partikuläre Lösung zur Inhomogenität  $f_1$ .

- $f_2$  (keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms): Mache Ansatz

$$y_p^{(2)}(x) = (a_0 \cos(2x) + a_1 \sin(2x)) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
 y_p^{(2)''}(x) - 2y_p^{(2)'}(x) &= f_2(x) \\
 \Leftrightarrow -4a_0 \cos(2x) - 4a_1 \sin(2x) + 4a_0 \sin(2x) - 4a_1 \cos(2x) &= \sin(2x) \\
 \text{Koeff.-Vergleich} \Leftrightarrow -4a_0 - 4a_1 &= 0 \quad \wedge \quad -4a_1 + 4a_0 = 1 \\
 a_0 &= -a_1 \quad \wedge \quad a_0 = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

Also ist  $y_p^{(2)}(x) = \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x))$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  eine partikuläre Lösung zur Inhomogenität  $f_2$ .

Insgesamt ist

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{x(1+x)}{2} + \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x))$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned}
 y(0) &= C_1 + C_2 + \frac{1}{8} \stackrel{!}{=} \frac{1}{8} \\
 \Rightarrow C_1 &= -C_2, \\
 y'(0) &= \left[ 2C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} + x - \frac{1}{4}(\sin(2x) + \cos(2x)) \right]_{x=0} = 2C_2 + \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Rightarrow C_2 &= -\frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \frac{1 - e^{2x}}{8} + \frac{x(1+x)}{2} + \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x))$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.