

## 13. Übungsblatt

### Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

Behandelt am 12. Februar 2026

#### Aufgabe 1 (Übung):

Das uneigentliche Integral

$$I(s) := \int_0^{\infty} \frac{1}{x^s + x^{1/s}} dx$$

sei in Abhängigkeit von  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gegeben. Bestimmen Sie alle  $s$ , für die  $I(s)$  konvergiert.

#### Aufgabe 2 (Übung):

Es sei  $\lambda > 0$ . Rechnen Sie nach, dass für jedes  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x} dx$$

konvergiert und berechnen Sie  $I_n(\lambda)$ .

*Hinweis:* Berechnen Sie  $I_0(1)$ , finden Sie dann mit partieller Integration eine Rekursionsformel für  $I_n(1)$  und folgern Sie schließlich den Wert von  $I_n(\lambda)$  aus demjenigen von  $I_n(1)$  mit Hilfe einer Substitution.

#### Aufgabe 3 (Übung):

a) Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

- i)  <sup>W</sup>  <sup>F</sup> Ist der Vektor  $v_i = 0$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  in  $v_1, \dots, v_n$  enthalten, dann sind  $v_1, \dots, v_n$  linear abhängig.
- ii)  <sup>W</sup>  <sup>F</sup> Sind  $v_1, \dots, v_n$  linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor  $v_k$  mit  $k \in \{1, \dots, n\}$  als Linearkombination der anderen Vektoren  $v_i$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $i \neq k$  darstellen.
- iii)  <sup>W</sup>  <sup>F</sup> Existiert ein  $v \in V$  mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der  $v_1, \dots, v_n$ , dann sind  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig.
- iv)  <sup>W</sup>  <sup>F</sup> Sind  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig und  $v \in V$ , dann sind  $v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_n + v$  linear unabhängig.
- v)  <sup>W</sup>  <sup>F</sup> Sind  $v_1, v_2$  linear unabhängig und sind  $v_1, v_3$  linear unabhängig, so sind auch  $v_2, v_3$  linear unabhängig.

b) Seien  $V = C(\mathbb{R})$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter seien  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$  paarweise verschiedene Zahlen (d.h.  $\beta_i \neq \beta_j$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$ ). Die Funktionen  $f_1, \dots, f_n \in V$  seien definiert durch  $f_i(x) = e^{\beta_i x}$  für alle  $1 \leq i \leq n$  und alle  $x \in \mathbb{R}$ . Rechnen Sie nach, dass  $f_1, \dots, f_n$  linear unabhängig sind.

#### Aufgabe 4 (Übung):

Bestimmen Sie eine Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sind die Zeilen linear unabhängig?

**Aufgabe 5 (Tutorium):**

Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale:

i) 
$$\int_0^{\infty} \frac{1 + \sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

ii) 
$$\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$$

**Aufgabe 6 (Tutorium):**

Zeigen Sie, dass die Funktionen  $\cosh, \cosh^2 \in C(\mathbb{R})$  linear unabhängig sind. Gilt dies auch für die Funktionen  $1, \sinh^2$  und  $\cosh^2$ ?

**Aufgabe 7 (Tutorium):**

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume bzw. affine Unterräume des  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  sind:

a)  $U_a := \{(a_n) \in V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a\}$  für  $a \in \mathbb{K}$ ,

b)  $U := \{(x_1, x_2) \in V = \mathbb{K}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\}$ ,

c)  $U := \{f \in V = C^1([0, 1]) \mid \int_0^1 f(x) dx + f'(1/2) = 1\}$ .

**Aufgabe 8 (Tutorium):**

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  eine Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Für welche  $\alpha, \beta$  sind die Zeilen linear unabhängig?