

Lösungsvorschlag zum 13. Übungsblatt
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
 Wintersemester 2025/26
 12. Februar 2026

Aufgabe 1 (Übung):

Das uneigentliche Integral

$$I(s) := \int_0^{\infty} \frac{1}{x^s + x^{1/s}} dx$$

 sei in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben. Bestimmen Sie alle s , für die $I(s)$ konvergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

1. Fall: Sei $s < 0$. Für jedes $x \geq 1$ gilt $x^s \leq x^0 = 1$ und $x^{1/s} \leq x^0 = 1$, so dass $\frac{1}{x^s + x^{1/s}} \geq \frac{1}{2}$ ist. Weiter ist

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \frac{1}{2} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{x}{2} \Big|_1^r = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2} = +\infty.$$

Nach dem Minorantenkriterium aus Satz 11.10 (3) ist auch das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s + x^{1/s}} dx$ divergent. Zusammen mit $\int_0^1 \frac{1}{x^s + x^{1/s}} dx > 0$ ist das uneigentliche Integral $I(s)$ divergent.

2. Fall: Sei $s \in (0, 1)$. Wir zeigen, dass sowohl das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^s + x^{1/s}} dx$ als auch das Integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s + x^{1/s}} dx$ konvergieren. Daraus folgt dann, dass $I(s)$ nach Definition 11.4 konvergiert. Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{1}{x^s + x^{1/s}} \leq \frac{1}{x^s}$. Da $\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx$ nach Beispiel 11.2 (2) konvergiert, ist $\int_0^1 \frac{1}{x^s + x^{1/s}} dx$ nach dem Majorantenkriterium aus Satz 11.10 (2) konvergent. Für jedes $x > 0$ gilt weiterhin $\frac{1}{x^s + x^{1/s}} \leq \frac{1}{x^{1/s}}$. Wegen $1/s > 1$ konvergiert $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/s}} dx$ nach Beispiel 11.2 (1). Mit dem Majorantenkriterium folgt dann auch die Konvergenz des Integrals $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s + x^{1/s}} dx$.

3. Fall: Sei $s = 1$. Dann ist $I(1) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx$ und nach Beispiel 11.2 (1) divergent.

4. Fall: Sei $s > 1$. Setzen wir $q := 1/s$, dann gilt $q \in (0, 1)$ und das Integral konvergiert mit der selben Argumentation wie in Fall 2, da

$$I(q) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^q + x^{1/q}} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{1/s} + x^s} dx = I(s).$$

Aufgabe 2 (Übung):

 Es sei $\lambda > 0$. Rechnen Sie nach, dass für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x} dx$$

 konvergiert und berechnen Sie $I_n(\lambda)$.

Hinweis: Berechnen Sie $I_0(1)$, finden Sie dann mit partieller Integration eine Rekursionsformel für $I_n(1)$ und folgern Sie schließlich den Wert von $I_n(\lambda)$ aus demjenigen von $I_n(1)$ mit Hilfe einer Substitution.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

 Wir zeigen zunächst, dass das uneigentliche Integral $I_0(1)$ konvergiert und dass sein Wert 1 ist:

$$(1) \quad I_0(1) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-x} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_{x=0}^r = \lim_{r \rightarrow \infty} (-e^{-r}) + e^0 = 1.$$

Partielle Integration mit $u(x) = x^n$ und $v'(x) = e^{-x}$ liefert

$$(2) \quad \begin{aligned} I_n(1) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r x^n e^{-x} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left([x^n (-e^{-x})]_{x=0}^r - \int_0^r x^{n-1} (-e^{-x}) dx \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} (-r^n e^{-r}) + n I_{n-1}(1) = n I_{n-1}(1). \end{aligned}$$

Per vollständiger Induktion lässt sich mittels der Rekursionsformel(2) zeigen, dass das Integral $I_n(1)$ konvergiert und den Wert $n!$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ annimmt:

- I.A.: $n = 0$: Wir haben bereits in (1) gesehen, dass $I_0(1)$ konvergiert und dass $I_0(1) = 1 = 0!$ gilt.
- I.V.: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann gelte $I_n(1) = n!$.
- I.S.: Für $n \rightarrow n + 1$ ergibt sich

$$I_{n+1}(1) = (n + 1) \cdot I_n(1) = (n + 1) \cdot n! = (n + 1)!,$$

wobei wir im ersten Schritt (2) und im zweiten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet haben.

Insgesamt ergibt sich für jedes $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} I_n(\lambda) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r x^n e^{-\lambda x} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda r} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^n e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \lambda^{-(n+1)} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda r} y^n e^{-y} dy \\ &= \lambda^{-(n+1)} I_n(1) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}, \end{aligned}$$

wobei wir $y = \lambda x$ mit " $dy = \lambda dx$ " substituiert haben.

Aufgabe 3 (Übung):

- a) Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum, $v_1, \dots, v_n \in V$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.
- i) ^W ^F Ist der Vektor $v_i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ in v_1, \dots, v_n enthalten, dann sind v_1, \dots, v_n linear abhängig.
 - ii) ^W ^F Sind v_1, \dots, v_n linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor v_k mit $k \in \{1, \dots, n\}$ als Linearkombination der anderen Vektoren v_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und $i \neq k$ darstellen.
 - iii) ^W ^F Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der v_1, \dots, v_n , dann sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig.
 - iv) ^W ^F Sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_n + v$ linear unabhängig.
 - v) ^W ^F Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2, v_3 linear unabhängig.
- b) Seien $V = C(\mathbb{R})$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Zahlen (d.h. $\beta_i \neq \beta_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$). Die Funktionen $f_1, \dots, f_n \in V$ seien definiert durch $f_i(x) = e^{\beta_i x}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Rechnen Sie nach, dass f_1, \dots, f_n linear unabhängig sind.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

- a) Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$.

^W ^F Ist der Vektor $v_i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ in v_1, \dots, v_n enthalten, dann sind v_1, \dots, v_n linear abhängig.

Begründung: Die Aussage ist wahr. O.b.d.A. sei $v_1 = 0$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ seien reelle Koeffizienten mit $\alpha_1 \neq 0$ und $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = \alpha_1 \cdot 0 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 0.$$

Da nicht alle α_i gleich null sind und die Linearkombination dennoch verschwindet sind v_1, \dots, v_n nach Definition 12.12 linear abhängig.

$\square \blacksquare$ ^{W F} Sind v_1, \dots, v_n linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor v_k mit $k \in \{1, \dots, n\}$ als Linearkombination der anderen Vektoren v_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und $i \neq k$ darstellen.

Begründung: Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir die beiden Vektoren $v_1 = 0$ und $v_2 = e_1$ des Vektorraums \mathbb{R}^2 . Nach Teil i) sind die Vektoren linear abhängig. Allerdings gibt es kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $e_1 = \alpha \cdot 0$.

$\blacksquare \square$ ^{W F} Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der v_1, \dots, v_n , dann sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig.

Begründung: Die Aussage ist wahr. Zum Beweis nehmen wir im Gegenteil an, dass v_1, \dots, v_n linear abhängig sind. Dann gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, nicht alle gleich 0, mit $0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$. Sei $v \in V$ ein Vektor mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der Vektoren v_1, \dots, v_n , also $v = \sum_{k=1}^n \beta_k v_k \neq 0$ mit $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$. Dann erhalten wir durch

$$v = v + 0 = \sum_{k=1}^n \beta_k v_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k) v_k = \sum_{k=1}^n \gamma_k v_k$$

mit $\gamma_k := \alpha_k + \beta_k \in \mathbb{K}$ eine weitere Darstellung von v als Linearkombination, ein Widerspruch. Also muss die Annahme verworfen werden und es folgt die Behauptung.

$\square \blacksquare$ ^{W F} Sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_n + v$ linear unabhängig.

Begründung: Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $V = \mathbb{R}^2$ und setzen $v_1 = e_1, v_2 = e_2$ und $v = -e_1$. Dann sind v_1, v_2 linear unabhängig, aber $v_1 + v = 0$ und $v_2 + v = (-1, 1)^T$ sind nach (i) linear abhängig.

$\square \blacksquare$ ^{W F} Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2, v_3 linear unabhängig.

Begründung: Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $V = \mathbb{R}^2$ und setzen $v_1 = e_1$ und $v_2 = v_3 = e_2$. Dann sind v_1, v_2 sowie v_1, v_3 linear unabhängig, aber wegen $v_2 - v_3 = 0$, sind v_2, v_3 linear abhängig.

b) Wir zeigen die Aussage mittels vollständiger Induktion.

I.A.: Sei $n = 1$ und sei $\lambda_1 e^{\beta_1 x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Aus $e^{\beta_1 x} > 0$, folgt $\lambda_1 = 0$ und damit lineare Unabhängigkeit (trivial).

I.V.: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Aussage für $n - 1$ beliebige Zahlen $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{n-1}$, die paarweise verschieden sind, bereits gezeigt ist.

I.S.: ($n - 1 \rightarrow n$) Seien $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$(*) \quad \lambda_1 e^{\beta_1 x} + \dots + \lambda_n e^{\beta_n x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $e^{-\beta_n x}$ und erhalten

$$\lambda_1 e^{(\beta_1 - \beta_n)x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{(\beta_{n-1} - \beta_n)x} + \lambda_n = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir differenzieren die letzte Gleichung und erhalten

$$\lambda_1 (\beta_1 - \beta_n) e^{(\beta_1 - \beta_n)x} + \dots + \lambda_{n-1} (\beta_{n-1} - \beta_n) e^{(\beta_{n-1} - \beta_n)x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $\beta_1 - \beta_n, \dots, \beta_{n-1} - \beta_n$ auch paarweise verschieden sind, folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$\lambda_1 (\beta_1 - \beta_n) = \dots = \lambda_{n-1} (\beta_{n-1} - \beta_n) = 0.$$

Da $\beta_i \neq \beta_n$ für $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, folgt $(\beta_i - \beta_n) \neq 0$ für $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ und damit

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0.$$

Aus (*) folgt $\lambda_n e^{\beta_n x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit $\lambda_n = 0$. Also sind f_1, \dots, f_n linear unabhängig.

Aufgabe 4 (Übung):

Bestimmen Sie eine Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sind die Zeilen linear unabhängig?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:Wir führen folgende Zeilenumformungen der 3×4 -Matrix A durch:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow -2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \cdot (-3) \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot (-1/2) \\ | \cdot (-1/2) \\ | \cdot (-1/3) \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -\frac{7}{2} \end{array} \end{aligned}$$

Die letzte Matrix ist in Zeilennormalform, da unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, das erste Element jeder Zeile eine 1 ist und sowohl ober- als auch unterhalb dieses Elementes lauter Nullen stehen. Jede Matrix die in Zeilennormalform ist, ist auch in Zeilenstufenform. Weiter gilt $r = n = 3$, d.h. es treten keine Nullzeilen auf und $3 = r = n \leq m = 4$. Die Folgerung von Satz 12.14 auf Slide 29 impliziert dann, dass die n Zeilen von A linear unabhängig sind.

Aufgabe 5 (Tutorium):

Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale:

i) $\int_0^{\infty} \frac{1 + \sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

ii) $\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

- (i) Das Integral ist uneigentlich bei 0 (Integrand unbeschränkt) und bei ∞ . Nach Definition 11.4 ist das gegebene Integral konvergent, falls

$$\int_0^1 \frac{1 + \sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)} dx \quad \text{und} \quad \int_1^{\infty} \frac{1 + \sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

beide konvergent sind. Es gilt

$$\left| \frac{1 + \sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

für alle $x \in (0, 1)$, wobei wir verwendet haben dass $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4 \lim_{a \rightarrow 0^+} [\sqrt{x}]_{x=a}^1 = 4 \lim_{a \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{a}) = 4.$$

Folglich ist $\int_0^1 \frac{1 + \sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ (absolut) konvergent nach dem Majorantenkriterium (siehe Satz 11.10 (2)). Ferner gilt

$$\left| \frac{1 + \sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{2}{x^{3/2}} = 2x^{-3/2}$$

für alle $x \in [1, \infty)$ und

$$\int_1^{\infty} 2x^{-3/2} dx = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-3/2} dx = -4 \lim_{b \rightarrow \infty} [x^{-1/2}]_{x=1}^b = 4.$$

Folglich ist $\int_1^{\infty} \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x(1+x)}} dx$ ebenfalls (absolut) konvergent nach dem Majorantenkriterium (siehe Satz 11.10 (2)). Damit ist

$$\int_0^{\infty} \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x(1+x)}} dx$$

(absolut) konvergent.

(ii) Das Integral ist uneigentlich bei 0. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion gilt

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{e^0}{x} = \frac{1}{x}$$

für alle $x \in (0, 1)$ und

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} [\ln(x)]_{x=a}^1 = - \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln(a) = \infty.$$

Folglich ist $\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$ divergent nach dem Minorantenkriterium (siehe Satz 11.10 (3)).

Aufgabe 6 (Tutorium):

Zeigen Sie, dass die Funktionen $\cosh, \cosh^2 \in C(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind. Gilt dies auch für die Funktionen $1, \sinh^2$ und \cosh^2 ?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \cosh(x) + \beta \cosh^2(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Setzen wir $x = 0$ in diese Gleichung ein, so erhalten wir $\alpha = -\beta$, da $\cosh(0) = \sinh(0) = 1$ gilt. Ableiten der Gleichung bezüglich x liefert

$$\alpha \sinh(x) + 2\beta \cosh(x) \sinh(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und erneutes Ableiten führt auf

$$\alpha \cosh(x) + 2\beta \cosh^2(x) + 2\beta \sinh^2(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Setzen wir $x = 0$ in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich $\alpha = -2\beta$. Mit obigen ergibt sich, $-\beta = \alpha = -2\beta$, was äquivalent zu $\beta = 2\beta$ ist. Also folgt $\beta = 0$ und somit $\alpha = 0$. Folglich sind \cosh, \cosh^2 linear unabhängig.

Die drei Funktionen $1, \sinh^2, \cosh^2$ sind nicht linear unabhängig, denn wegen $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot \sinh^2(x) + (-1) \cdot \cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x) - \cosh^2(x) = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit haben wir Zahlen $a_1 = a_2 = -a_3 = 1$ in \mathbb{R} gefunden die nicht alle verschwinden und die Linearkombination dennoch null wird.

Aufgabe 7 (Tutorium):

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume bzw. affine Unterräume des \mathbb{K} -Vektorraums V sind:

- $U_a := \{(a_n) \in V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a\}$ für $a \in \mathbb{K}$,
- $U := \{(x_1, x_2) \in V = \mathbb{K}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\}$,
- $U := \{f \in V = C^1([0, 1]) \mid \int_0^1 f(x) dx + f'(1/2) = 1\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

- a) Sei $a = 0$. U_0 ist ein Untervektorraum (UVR) von V , denn die konstante Nullfolge ist der Nullvektor in V und liegt gleichzeitig in U_0 . Zudem gilt für zwei Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_n \rightarrow 0$ und $b_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, dass auch $a_n + b_n \rightarrow 0$ und $\alpha a_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, also $(a_n) + (b_n), \alpha(a_n) \in U_0$. Sei $a \neq 0$. U_a ist kein UVR, da $0 \notin U$ (also (V3) aus Definition 6.1 ist nicht erfüllt). Doch U_a kann geschrieben werden als $a + U_0$, wobei a die Folge ist, die konstant a ist. Da U_0 ein UVR von V ist, ist U_a somit ein affiner Unterraum von V (vgl. Definition 12.6).
- b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann gilt für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$x_1^2 + x_2^4 = 0$$

genau dann, wenn $x_1 = x_2 = 0$ ist. Somit ist U der triviale UVR von V .

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann ist $(i, i) \in U$ (wegen $i^2 = -1, i^4 = 1$), aber $2(i, i) = (2i, 2i) \notin U$, denn

$$(2i)^2 + (2i)^4 = -4 + 16 = 12.$$

Eigenschaft (ii) aus Satz 6.9 ist nicht erfüllt, somit ist U kein UVR. Da $0 \in U$ enthalten ist, kann U kein affiner Raum sein, denn dann müsste es auch ein UVR sein. Wir haben aber gezeigt, dass es kein UVR ist. Also ist U auch kein affiner Raum.

- c) Aus der Vorlesung ist bereits bekannt, dass $C^1([0,1])$ ein Vektorraum ist. Außerdem ist jede Funktion in $C^1([0,1])$ auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar. U ist kein Untervektorraum, da die konstante Nullfunktion nicht in U liegt (für $f(x) = 0$ ist $\int_0^1 f(x) dx + f'(1/2) = \int_0^1 0 dx + 0 = 0$). Es ist jedoch ein affiner Unterraum, denn: Die konstante Einsfunktion 1 liegt in U und U kann geschrieben werden als

$$U = 1 + \underbrace{\left\{ f \in C^1[0,1] \mid \int_0^1 f(x) dx + f'(1/2) = 0 \right\}}_{=:W} = 1 + W$$

mit $1 \in C^1([0,1])$. Was daran liegt, dass das Integral und die Ableitung sich linear verhalten

$$\int_0^1 (f+g)(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx, \quad (f+g)'(1/2) = f'(1/2) + g'(1/2).$$

Aufgabe 8 (Tutorium):

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β sind die Zeilen linear unabhängig?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:

Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot (-2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow \cdot 2 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \cdot (-4) \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \cdot \frac{1}{2} \\ \leftarrow \cdot \frac{1}{4} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot \frac{1}{2} \\ \leftarrow \cdot \frac{1}{4} \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die letzte Matrix ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in Zeilenstufenform. Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 4$, für $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$. Ansonsten ist $r = 3$. Nach der Vorlesung ($r = n$, siehe Folgerung von Satz 12.14 auf Slide 29), sind die Zeilen von A damit linear unabhängig genau dann, wenn $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$ gilt. Sind $\alpha = 10$ und $\beta = 4$, so ist die letzte Matrix bereits die Zeilennormalform von A und die Basis ist gegeben durch die drei ersten Zeilen der Matrix. In allen anderen Fällen ist eine Basis durch alle vier Zeilen der Ausgangsmatrix gegeben. Ist $\alpha = 10$ aber $\beta \neq 4$, so ist

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{\beta-4} \\ \cdot \frac{-3}{\beta-4} \\ \cdot \frac{1}{\beta-4} \end{array}$$

die Zeilennormalform von A . Ist $\alpha \neq 10$, so sei $\kappa := \frac{\beta-4}{\alpha-10}$ und es gilt

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} \left| \cdot \frac{1}{\alpha-10} \right. \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-6) \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot (-6) \end{array} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 - 6\kappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 + 4\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von A .