Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

14. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

Behandelt am 19. Februar 2026

Aufgabe 1 (Übung):
Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) W □ F □ Kern $A = \{0\} \implies Ax = \vec{b}$ hat genau eine Lösung.

b) W □ F □ Bild $A = \mathbb{K}^n \implies Ax = \vec{b}$ hat genau eine Lösung.

c) W □ F □ $A \neq 0 \implies \forall\, n \in \mathbb{N} : A^n \neq 0$.

d) W □ F □ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Aufgabe 2 (Übung):
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$.

Aufgabe 3 (Übung):

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} k x_k$ eine Abbildung.
   (i) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.
   (ii) Bestimmen Sie eine Basis von Kern ϕ und eine Basis von Bild ϕ.
   (iii) Für welche n ist ϕ injektiv?

b) Gegeben sei die Abbildung $\phi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$.
   Ist ϕ linear? Bestimmen Sie Kern ϕ und Bild ϕ.

Aufgabe 4 (Übung):
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Überprüfen Sie, ob A regulär ist und berechnen Sie in diesem Fall A^{-1}.

Aufgabe 5 (Tutorium):
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix} \ , \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \ .$$

Bestimmen Sie in Abhändigkeit von α, β eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ und $\mathrm{Kern}(A)$, sowie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{C}^2$ der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$.