Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

Lösungsvorschlag zum 14. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

19. Februar 2026

Aufgabe 1 (Übung):
Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) W ☐ F ☐ $\operatorname{Kern} A = \{0\} \implies A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung.

b) W ☐ F ☐ $\operatorname{Bild} A = \mathbb{K}^n \implies A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung.

c) W ☐ F ☐ $A \neq 0 \implies \forall n \in \mathbb{N} : A^n \neq 0$.

d) W ☐ F ☐ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$.

W ■ F ☐ $\operatorname{Kern} A = \{0\} \implies A\vec{x} = b$ hat genau eine Lösung.

Begründung: Diese Aussage ist wahr. Wenn $\operatorname{Kern} A = \{0\}$, dann gilt $\dim(\operatorname{Kern} A) = 0$ und somit mit der Dimensionsformel aus Satz 12.31 $\dim \operatorname{Bild} A = \operatorname{Rang} A = n$. Damit ist die Abbildung $\phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $\vec{x} \mapsto \phi_A(\vec{x}) := A\vec{x}$ surjektiv, per Definition existiert also eine Lösung. Eindeutigkeit erhält man wie folgt: Angenommen $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ sind zwei verschiedene Lösungen. Dann gilt $A\vec{x}_1 = \vec{b}$ und $A\vec{x}_2 = \vec{b}$. Subtrahiert man beide von einander so erhält man $0 = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$. Also $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \operatorname{Kern} A$. Nach Vorraussetzung gilt dann $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 0$ und damit $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

W ■ F ☐ $\operatorname{Bild} A = \mathbb{K}^n \implies A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung.

Begründung: Diese Aussage ist wahr. Aus $\dim \operatorname{Bild} A = n$ folgt $\dim \operatorname{Kern} A = 0$ und wir sind in der gleichen Situation wie im ersten Teil.

W ☐ F ■ $A \neq 0 \implies \forall n \in \mathbb{N} : A^n \neq 0$.

Begründung: Diese Aussage ist falsch. Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Dann gilt $A^n \neq 0$ für alle $n \in \{0, \dots, m-1\}$ aber $A^n = 0$ für alle $n \in \{m, m+1, \dots\}$. Bei jedem multiplizieren mit sich selbst wandert die 1 nämlich um eine Position nach rechts.

W ☐ F ■ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Begründung: Diese Aussage ist falsch. Wir setzen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = A^2 + 2AB + B^2.$$

Aufgabe 2 (Übung):
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Wir formen die erweiterte Matrix in Zeilennormalform um und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Mit dem (-1)-Trick (vgl. Kapitel 12 Slide 50) betrachten wir die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

woraus wir das Ergebnis ablesen können. Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -9+s+10t \\ -s \\ -7+7t \\ t \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{K} \right\}.$$

Aufgabe 3 (Übung):

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n k x_k$ eine Abbildung.
   (i) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.
   (ii) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}\phi$ und eine Basis von $\operatorname{Bild}\phi$.
   (iii) Für welche n ist ϕ injektiv?

b) Gegeben sei die Abbildung $\phi \colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$.
   Ist ϕ linear? Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}\phi$ und $\operatorname{Bild}\phi$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) (i) Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\phi(\alpha x + y) = \sum_{k=1}^n k(\alpha x_k + y_k) = \alpha \sum_{k=1}^n k x_k + \sum_{k=1}^n k y_k = \alpha\phi(x) + \phi(y).$$

(ii) Sei $(a, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Wegen $\phi(a, 0, \ldots, 0) = 1 \cdot a = a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Bild}\phi = \mathbb{R}$, also ist $\{1\}$ eine Basis von $\operatorname{Bild}\phi$. Insbesondere ist $\dim(\operatorname{Bild}\phi) = \dim(\mathbb{R}) = 1$. Nun überlegen wir uns, wie viele Basisvektoren $\operatorname{Kern}\phi$ aufspannen. Mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

ergibt sich

$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Damit ist ϕ die induzierte lineare Abbildung von A mit $\phi_A = \phi$. Die Dimensionsformel aus Satz 12.31 liefert $n = \dim(\operatorname{Bild} A) + \dim(\operatorname{Kern} A)$, also ist $\dim(\operatorname{Kern} A) = n - 1$ wegen $\dim(\operatorname{Bild} A) = \dim(\operatorname{Bild}\phi) = 1$. Wir bestimmen nun $\operatorname{Kern}\phi = \operatorname{Kern} A$. Jeder der $n-1$ Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ist in $\operatorname{Kern}\phi$ enthalten wie man leicht nachrechnet. Diese Vektoren (bzw. die Negativen davon) erhalten wir durch Einsetzen von -1 in x_k und k in x_1 für $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ in der Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = 0$$

oder über den (-1)-Trick. Da die angegebenen $n-1$ Vektoren linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von $\operatorname{Kern}\phi$:

$$\operatorname{Kern}\phi = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii) Wegen ϕ injektiv $\overset{\text{Satz 12.5 3)}}{\iff}$ $\operatorname{Kern}\phi = \{0\} \iff \dim\operatorname{Kern}\phi = 0$, ist ϕ nach ii) genau für $n = 1$ injektiv, da $\dim\operatorname{Kern} A = \dim\operatorname{Kern}\phi = n - 1$.

(b) Wegen $\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ ist ϕ linear. Die Zeilennormalform von A ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Kern von ϕ ist der Kern von A und somit die Lösungsmenge von $A\vec{x} = 0$. In Zeilennormalform ergibt dies die Forderung

$$x_1 + x_2 = 0,$$

somit als Lösungsmenge $\operatorname{Kern}\phi = \operatorname{Kern} A = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{K} \right\}$. Das Bild von ϕ ist die Menge $\{\phi(x) : x \in \mathbb{K}^2\}$, die aufgespannt wird durch die Bilder der Einheitsvektoren e_1, e_2, was gerade die Spalten von A sind. Somit gilt

$$\operatorname{Bild}\phi = \operatorname{Bild} A = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{K} \right\}.$$

Aufgabe 4 (Übung):
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Überprüfen Sie, ob A regulär ist und berechnen Sie in diesem Fall A^{-1}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Bringt man A in Zeilenstufenform, so findet man

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit hat A in Zeilenstufenform keine Nullzeile und damit vollen Rang, also Rang $A = 4$. Entsprechend ist A regulär.

Bemerkung: Man kann sich obige Rechnung sparen, wenn man die Inverse direkt berechnet.

Ihre Inverse ergibt sich durch

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 5 \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & -5 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{llll} + & & & \\ & \cdot \frac{14}{3} & \cdot(-2) & \\ & + & & \mid \cdot 3 \\ & & + & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & 15 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} + & \mid \cdot \frac{1}{3} \\ & + \\ & \\ & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Deshalb gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (Tutorium):
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

Wir formen die Matrix so weit zu einer Zeilenstufenform um, wie die Allgemeinheit von α und β es zulässt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-\alpha) \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha^2 & 2-\alpha \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha^2 & 2-\alpha \end{array}\right)$$

Nun folgt eine Fallunterscheidung.

1. Fall: $\beta \neq \alpha^2$. Sei $\gamma := \frac{2-\alpha}{\beta-\alpha^2}$. Wir dividieren die dritte Zeile durch $\beta-\alpha^2$ und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right) \begin{array}{ll} & + \\ + & \\ \cdot(-\alpha) & \cdot(-2-\alpha) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-(2+\alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1-\alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist also eindeutig Lösbar, die Lösung lautet

$$x = \begin{pmatrix} 2-(2+\alpha)\gamma \\ 1-\alpha\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\frac{4-\alpha^2}{\beta-\alpha^2} \\ 1-\frac{\alpha(2-\alpha)}{\beta-\alpha^2} \\ \frac{2-\alpha}{\beta-\alpha^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta-\alpha^2}\begin{pmatrix} 2\beta-\alpha^2-4 \\ \beta-2\alpha \\ 2-\alpha \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $\beta = \alpha^2$, $\alpha \neq 2$. Das Gleichungssystem hat die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha \end{array}\right)$$

und ist wegen $2-\alpha \neq 0$ nicht lösbar, da die erweiterte Matrix mit 3 einen höheren Rang hat als die Matrix selbst.

3. Fall: $\beta = \alpha^2$, $\alpha = 2$ (also $\beta = 4$). Die Matrix hat die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und ist in Zeilennormalform. Ausgeschrieben lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 &= 2, \\ x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 4x_3, \\ x_2 &= 1 - 2x_3, \\ x_3 &= x_3. \end{aligned}$$

x_3 ist also ein frei wählbarer Paramter und der Lösungsraum der gegebenen Gleichung lautet

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{K} \right\}.$$

Alternativ kann man in Matrixform den so genannten (-1)-Trick anwenden (siehe Slide 50 - 52 in Kapitel 12). Ist die Matrix in Zeilennormalform, ergänze man die gesamte Matrix so durch Nullzeilen, dass die nicht erweiterte Matrix quadratisch ist und die Nicht-Nullzeilen ihre vorhandene erste Eins auf der Diagonale dieser Matrix haben (dies ist hier bereits der Fall, links steht eine 3×3-Matrix mit ihren Einsen auf der Diagonalen. Nun ersetzt man die Nullen auf der Diagonale durch (-1)en. Die spezielle Lösung des Gleichungssystems ist über die Spalte ganz rechts abzulesen, der Lösungsraum der homogenen Gleichung (mit Parameter davor) ist durch die Spalten der Matrix links gegeben, die zu einer eingefügten (-1) gehören.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & (-1) & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{K} \right\}$$

Hinweis: Der Vektor $(4, 2, -1)$ hat hierbei ein anderes Vorzeichen als bei der oberen Methode, durch die freie Wahl von $s \in \mathbb{K}$ handelt es sich jedoch um die Gleiche Lösungsmenge.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie in Abhändigkeit von α, β eine Basis von $\operatorname{Bild}(A)$ und $\operatorname{Kern}(A)$, sowie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{C}^2$ der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:
Bringe zunächst die erweiterte Matrix $(A|\vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 3 \\ \beta & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-\beta) \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 2-\alpha\beta & 4-3\beta \end{array}\right). \tag{1}$$

- $\alpha\beta \neq 2$: In diesem Fall ist (siehe Definition 12.29 des Skriptes) $\dim \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{Rang}(A) = 2$. Also ist $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{C}^2$. Nach der Dimensionsformel (siehe Satz 12.31) ist $2 = \operatorname{Rang}(A) + \dim \operatorname{Kern}(A)$. Also ist $\dim \operatorname{Kern}(A) = 0$ und $\operatorname{Kern}(A) = \{\vec{0}\}$. Nach (3) auf Slide 41 des Skriptes ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Die Lösung $\vec{x}$ erhält man in diesem Fall durch

$$(A|\vec{b}) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 2-\alpha\beta & 4-3\beta \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ | \cdot \frac{1}{2-\alpha\beta} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4-3\beta}{2-\alpha\beta} \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-\alpha) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{6-4\alpha}{2-\alpha\beta} \\ 0 & 1 & \frac{4-3\beta}{2-\alpha\beta} \end{array}\right),$$

  also $\vec{x} = \frac{1}{2-\alpha\beta} \begin{pmatrix} 6-4\alpha \\ 4-3\beta \end{pmatrix}$.

- $\alpha\beta = 2$: In diesem Fall ist $\dim \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{Rang}(A) = 1$ (siehe Definition 12.29 des Skriptes oder Blatt 13 Aufgabe 3 (i)). Da $\operatorname{Bild}(A)$ die lineare Hülle von A ist (siehe Beispiel 12.11), muss

$$\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

  gelten. Den Kern von A kann man mit dem (-1)-Ergänzungstrick (siehe Slide 50-52 in Kapitel 12) aus der Zeilennormalform von A ablesen und erhält

$$\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

  Das lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

  Dies ist genau für $\alpha = \frac{3}{2}$ bzw. $\beta = \frac{4}{3}$ der Fall. Dann kann eine partikuläre Lösung $\vec{z}$ aus der obigen Zeilennormalform der erweiterten Matrix (1) abgelesen werden. Ausgeschrieben lauten die Gleichungen

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 3$$

$$x_2 = x_2$$

also ist x_2 ein frei wählbarer Parameter. Es folgt dann $\begin{pmatrix} 3 - \frac{3}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ bzw. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.
Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist nach Slide 41 aus Kapitel 12 des Skriptes durch

$$\vec{z} + \mathrm{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

mit $\vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.