

## 15. Übungsblatt

### Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26  
Hochgeladen am 19. Februar 2026

#### Aufgabe 1 (Vollständige Induktion, Folgen & Reihen):

(a) Zeigen Sie für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n \prod_{j=0}^m (k+j) = \frac{1}{m+2} \prod_{j=0}^{m+1} (n+j) \text{ mit } m \in \mathbb{N}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-5)^k}{6^k}.$$

(c) Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$ , für die die folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n} x^{2n}.$$

(d) Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge  $(a_n)$  gegeben durch

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2+n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Aufgabe 2 (Funktionsfolgen & Grenzwerte):**

(a) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei die Funktion  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f_n(x) = \int_0^x e^t \cos(nt) dt, \quad x \in [0, 1],$$

gegeben. Untersuchen Sie die Funktionenfolge  $(f_n)$  auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

*Hinweis:* Partielle Integration.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \tan(x) + \frac{1}{x - \pi/2} \right).$$

**Aufgabe 3 (Integrale & Differentialgleichungen):**

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)^2 dx.$$

(b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

$$\text{i) } \int_1^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt, \quad \text{ii) } \int_1^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

(c) Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \sin(x) \frac{1 - y(x)^2}{2y(x)}, \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

**Aufgabe 4 (Gleichungssystem):**

Seien  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -7 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Lösungsmenge des Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

**Aufgabe 5 (Wahr & Falsch Fragen):**

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann integrierbar.

a)  <sup>W</sup>  <sup>F</sup>  $\left( f \text{ stetig und } \int_a^b f(x) dx = 0 \right) \implies f = 0.$

b)  <sup>W</sup>  <sup>F</sup>  $\int_a^b |f(x)| dx = 0 \implies f = 0.$

Sei nun  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

c)  <sup>W</sup>  <sup>F</sup> Das Anfangswertproblem  $y' = f(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  besitzt eine Lösung.

d)  <sup>W</sup>  <sup>F</sup> Das Anfangswertproblem  $y' = f(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  ist eindeutig lösbar.

Seien nun  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

e)  <sup>W</sup>  <sup>F</sup>  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \implies \int_0^{\infty} f(x) dx$  konvergiert.

f)  <sup>W</sup>  <sup>F</sup>  $\int_0^1 g(x)^2 dx$  konvergiert  $\implies \int_0^1 g(x) dx$  konvergiert.

g)  <sup>W</sup>  <sup>F</sup>  $\int_0^1 g(x) dx$  konvergiert  $\implies \int_0^1 g(x)^2 dx$  konvergiert.