Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Florian Babisch
M.Sc. Emile Bukieda

Lösungsvorschlag zum 15. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2025/26

19. Februar 2026

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion, Folgen & Reihen):

(a) Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{m} (k+j) = \frac{1}{m+2} \prod_{j=0}^{m+1} (n+j) \text{ mit } m \in \mathbb{N}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-5)^k}{6^k}.$$

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n} x^{2n}.$$

(d) Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge (a_n) gegeben durch

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2+n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion über n.

I.A.: Sei zunächst $n = 1$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} \prod_{j=0}^{m} (k+j) = \prod_{j=0}^{m} (1+j) = \frac{1}{m+2}(1+m+1) \prod_{j=0}^{m} (1+j) = \frac{1}{m+2} \prod_{j=0}^{m+1} (1+j).$$

I.V.: Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{m} (k+j) = \frac{1}{m+2} \prod_{j=0}^{m+1} (n+j)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

I.S.: $(n \to n+1)$ Daraus und mit einer Indexverschiebung im Produkt folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{j=0}^{m} (k+j) &= \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{m} (k+j) + \prod_{j=0}^{m} (n+1+j) \\
&\overset{I.V.}{=} \frac{1}{m+2} \prod_{j=0}^{m+1} (n+j) + \prod_{j=0}^{m} (n+1+j) \\
&\overset{j \to j+1}{=} \frac{n}{m+2} \prod_{j=0}^{m} (n+1+j) + \prod_{j=0}^{m} (n+1+j) \\
&= \frac{n+m+2}{m+2} \prod_{j=0}^{m} (n+1+j) \\
&= \frac{1}{m+2} \prod_{j=0}^{m+1} (n+1+j).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus dem Prinzip der vollständigen Induktion.

(b) Mit der Formel für die geometrische Reihe berechnen wir

$$\sum_{k=4}^{\infty}\left(-\frac{5}{6}\right)^k = \left(-\frac{5}{6}\right)^4 \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{6}\right)^k = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{1+\frac{5}{6}} = \frac{5^4}{11\cdot 6^3} = \frac{625}{2376}.$$

(c) Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n} x^{2n}} = \limsup_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-1} x^2 = \frac{x^2}{2} < 1 \iff |x| < \sqrt{2}.$$

Damit besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\sqrt{2}$. Für $x = \pm\sqrt{2}$ gilt

$$\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n} x^{2n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n} \to e^{1/2} \neq 0$$

für $n\to\infty$. Da die Reihenglieder in diesem Fall keine Nullfolge bilden, ist die Reihe in diesem Fall divergent. Es folgt, dass die Potenzreihe genau dann konvergiert, wenn $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ gilt.

Alternative zur Bestimmung des Konvergenzradius. Setze

$$a_n = \begin{cases} \left(2+\frac{2}{n}\right)^{-n/2}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also hat die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius $\sqrt{2}$.

(d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2+n} = \left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2}\left(\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = b_n\sqrt[n]{b_n},$$

wobei wir $b_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2}$ setzen. Als Teilfolgen von $\left(\left(1+\frac{\pm 1}{n}\right)^n\right)_n$ erhalten wir $b_{2n} \to e$ und $b_{2n+1} \to e^{-1}$ für $n\to\infty$. Insbesondere ist die Folge (b_n) durch die beiden Teilfolgen beschränkt und es folgt mit dem Sandwichkriterium $\sqrt[n]{b_n} \to 1$ für $n\to\infty$. Damit erhalten wir $a_{2n} \to e$ und $a_{2n+1} \to e^{-1}$ für $n\to\infty$. Die Menge der Häufungswerte vom (a_n) lautet $\{e, e^{-1}\}$.

Aufgabe 2 (Funktionenfolgen & Grenzwerte):

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \int_0^x e^t \cos(nt)dt, \quad x \in [0,1],$$

gegeben. Untersuchen Sie die Funktionenfolge (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. *Hinweis:* Partielle Integration.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to \pi/2} \left(\tan(x) + \frac{1}{x - \pi/2} \right).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Mit partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_0^x e^t \cos(nt)dt &= -\frac{1}{n} \int_0^x e^t \sin(nt)dt + \left[\frac{1}{n} e^t \sin(nt)\right]_0^x \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^x e^t \sin(nt)dt + \frac{1}{n} e^x \sin(nx).\end{aligned}$$

Mit der Abschätzung $|\sin(x)| \leq 1$ und der Monotonie der Exponentialfunktion erhalten wir damit

$$|f_n(x)| = \left| \int_0^x e^t \cos(nt)dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^1 e^t dt + \frac{1}{n} e^x = \frac{e}{n} - \frac{1}{n} + \frac{e^x}{n} \leq \frac{2e}{n} \to 0$$

für $n \to \infty$. Also konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig und somit auch punktweise gegen 0.

Alternative. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Mit partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}f_n(x) &= n \int_0^x e^t \sin(nt)dt + \left[e^t \cos(nt)\right]_0^x \\ &= n \int_0^x e^t \sin(nt)dt + e^x \cos(nx) - 1 \\ &= -n^2 \int_0^x e^t \cos(nt)dt + \left[ne^t \sin(nt)\right]_0^x + e^x \cos(nx) - 1 \\ &= -n^2 f_n(x) + ne^x \sin(nx) + e^x \cos(nx) - 1.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{1+n^2} \big(ne^x \sin(nx) + e^x \cos(nx) - 1\big) \right| \leq e \frac{2+n}{1+n^2} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig in x ist.

(b) Für alle $x \in (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ gilt

$$\tan(x) + \frac{1}{x - \pi/2} = \frac{\sin(x)(x - \pi/2) + \cos(x)}{\cos(x)(x - \pi/2)}.$$

Wir definieren $f, g\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \sin(x)(x - \pi/2) + \cos(x)$ und $g(x) := \cos(x)(x - \pi/2)$ für $x \in (0, \pi)$. Die Funktionen f und g sind beliebig oft differenzierbar und wir berechnen

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos(x)(x - \pi/2) + \sin(x) - \sin(x) = \cos(x)(x - \pi/2), \\ f''(x) &= -\sin(x)(x - \pi/2) + \cos(x), \\ g'(x) &= -\sin(x)(x - \pi/2) + \cos(x), \\ g''(x) &= -\cos(x)(x - \pi/2) - 2\sin(x)\end{aligned}$$

für $x \in (0, \pi)$. Wir haben

$$\lim_{x \to \pi/2} f(x) = \lim_{x \to \pi/2} f'(x) = \lim_{x \to \pi/2} g(x) = \lim_{x \to \pi/2} g'(x) = 0$$

und $\lim_{x \to \pi/2} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{0}{-2} = 0$. Die Regel von l'Hospital liefert somit

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0.$$

Aufgabe 3 (Integrale & Differentialgleichungen):

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)^2 dx.$$

(b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t^2} dt$, ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt$.

(c) Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \sin(x) \frac{1 - y(x)^2}{2y(x)}, \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Mit der Substitution $x = \arctan(t)$ erhalten wir

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)^2 dx = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^2} dt = 1 - \arctan(1) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

1. Alternative. Es gilt

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)^2 dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)^2} dx = \big[\tan(x)\big]_0^{\pi/4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

2. Alternative. Es gilt mit partieller Integration

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)^2 dx = \int_0^{\pi/4} \sin(x) \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} dx = -\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\cos(x)} dx + \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(b) i) Für alle $t \in [1, \infty)$ gilt $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \le \frac{1}{t^2}$. Das uneigentlich Integral $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ konvergiert mit

$$\lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{1}{t^2} dt = \lim_{R \to \infty} -\frac{1}{t}\Big|_1^R = \lim_{R \to \infty} -\frac{1}{R} + 1 = 1.$$

Nach dem Majorantenkriterium ist also auch das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ absolut konvergent.

ii) Für $R > 1$ berechnen wir mit partieller Integration

$$\int_1^R \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_1^R \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \frac{\sin(R)}{R} - 1.$$

Wegen $\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \le \frac{1}{t^2}$ für alle $t \in [1, \infty)$, existiert der Grenzwert $\lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ wie in Teil (i). Außerdem gilt $\lim_{R \to \infty} \frac{\sin(R)}{R} = 0$. Somit ist das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^R \frac{\cos(t)}{t} dt$ konvergent.

(c) Durch Trennung der Variablen erhalten

$$\int_{\sqrt{2}}^{y(x)} \frac{2t}{1-t} dt = \int_0^x \sin(t) dt$$

und damit

$$\begin{aligned} 1-\cos(x) &= [-\cos(t)]_0^x \\ &= \int_0^x \sin(t) dt \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{y(x)} \frac{2t}{1-t^2} dt \\ &= \left[-\log(t^2-1)\right]_{\sqrt{2}}^{y(x)} \\ &= -\log(y(x)^2-1). \end{aligned}$$

Wir erhalten durch Auflösen dieser Gleichung $y(x)^2 - 1 = e^{\cos(x)-1}$ und somit $y(x) = \sqrt{1+e^{\cos(x)-1}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (Gleichungssystem):
Seien $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -7 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Wir formen die erweiterte Matrix $(A|\vec{b})$ durch die folgenden Schritte in Zeilennormalform um.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -7 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & \alpha \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & \alpha-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-6 \end{array}\right).$$

Hieraus können wir direkt die gewünschten Informationen ablesen. Falls $\alpha \neq 6$, hat die erweiterte Matrix den Rang 3 und somit hat in diesem Fall das Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung. Falls $\alpha = 6$ ist Rang $A = 2$ und wir wählen den freien Parameter $x_3 = s$ womit sich folgende Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + s \\ x_2 &= 1 - 2t. \end{aligned}$$

Also gibt es unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems und die Lösungsmenge ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \; : \; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für den Kern ergibt sich

$$\text{Kern } A = \text{lin}\{(1,-2,1)^\intercal\}.$$

Aufgabe 5 (Wahr & Falsch Fragen):
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar.

a) W ☐ F ☐ $\left(f \text{ stetig und } \int_a^b f(x)dx = 0\right) \Longrightarrow f = 0.$

b) W □ F □ $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx = 0 \Longrightarrow f = 0.$

Sei nun $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $y_0 \in \mathbb{R}$.

c) W □ F □ Das Anfangswertproblem $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$ besitzt eine Lösung.

d) W □ F □ Das Anfangswertproblem $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$ ist eindeutig lösbar.

Seien nun $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und $g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ stetig.

e) W □ F □ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \int_0^\infty f(x)dx$ konvergiert.

f) W □ F □ $\displaystyle\int_0^1 g(x)^2 dx$ konvergiert $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ konvergiert.

g) W □ F □ $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ konvergiert $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 g(x)^2 dx$ konvergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Rieman integrierbar.

W □ F ■ $\displaystyle\left(f \text{ stetig und } \int_a^b f(x)dx = 0\right) \Longrightarrow f = 0.$

Begründung: Die Behauptung ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin(x)$. Dann ist das Integral 0, aber f nicht identisch 0.

W □ F ■ $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx = 0 \Longrightarrow f = 0.$

Begründung: Die Behauptung ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 0$ für $x \in [a,b)$ und $f(b) = 1$. Dann f ist Riemann-intergrierbar mit $\int_a^b f(x)dx = 0$, aber es gilt $f \neq 0$.

W □ F ■ Das Anfangswertproblem $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$ besitzt eine Lösung.

Begründung: Diese Behauptung ist wahr. Man erhält eine Lösung durch Trennung der Variablen.

W □ F ■ Das Anfangswertproblem $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$ ist eindeutig lösbar.

Begründung: Diese Behautpung ist falsch. Wir betrachten $y' = f(y) = 2\sqrt{y}$ mit $y(0) = 0$. Eine Lösung des Anfangswertproblems lautet $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine andere Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ x^2, & x \in [0,\infty), \end{cases}$$

gegeben.

Seien $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und $g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ stetig.

W □ F ■ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0 \Rightarrow \int_0^\infty f(x)dx$ konvergiert.

Begründung: Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $f(x) = \frac{1}{x+1}$ für $x \in [0,\infty)$. Dann ist f stetig und es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = 0$. Wegen

$$\int_0^R \frac{1}{x+1}dx = \log(R+1) \to \infty$$

für $R \to \infty$, ist das uneigentliche Integral nicht konvergent.

W F
■ □ $\displaystyle\int_0^1 g(x)^2 dx$ konvergiert $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ konvergiert.

Begründung: Diese Aussage ist wahr. Das uneigentliche Integral $\int_0^1 g(x)^2 dx$ sei konvergent. Es folgt

$$\int_r^1 |g(x)|dx \leq \frac{1}{2}\int_r^1 \left(1 + g(x)^2\right)dx \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 g(x)^2 dx$$

für $r \to 0^+$. Damit ist nach dem Majorantenkriterium auch $\int_0^1 g(x)dx$ absolut konvergent.

W F
□ ■ $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ konvergiert $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 g(x)^2 dx$ konvergiert.

Begründung: Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Funktion $g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^{-1/2}$ für $x \in (0,1]$. Wir haben

$$\int_r^1 g(x)dx = \int_r^1 x^{-1/2}dx = \left[2x^{1/2}\right]_r^1 = 2 - 2\sqrt{r} \to 2$$

für $r \to 0^+$, aber

$$\int_r^1 g(x)^2 dx = \int_r^1 x^{-1}dx = \left[\log(x)\right]_r^1 = -\log(r) \to \infty$$

für $r \to 0^+$.