Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

SS23

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Hauptklausur

Aufgabe 1: ((4 + 10) + 6 = 20 Punkte)

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Gegeben ist die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(i) Bestimmen Sie die Determinante von A_α und geben Sie alle α an so, dass A_α vollen Rang hat.

(ii) Sei nun $\alpha = 0$. Zeigen Sie, dass jedes $\lambda \in \{-2, 0, 3\}$ ein Eigenwert von A_0 ist. Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $S^{-1}A_0S$ diagonal ist.

(b) Es sei $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine positiv definite Matrix. Sei $\lambda > 0$ ein Eigenwert von B^2. Zeigen Sie, dass $\sqrt{\lambda}$ ein Eigenwert von B ist.

Aufgabe 2: (10 + 5 + 5 = 20 Punkte)

a) Gegeben sei die Menge
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\}.$$
Bestimmen Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, (u, v) und $(-u, v)$ für $(u, v) \in E$, welches maximalen Flächeninhalt hat. Formulieren Sie das Problem als Optimierungsproblem mit einer Nebenbedingung und wenden Sie dann die Multiplikatorenregel von Lagrange an.

b) Es sei
$$B = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 \geq 0, \|x\| \leq 1\}.$$
Es sei $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Bestimmen Sie das Integral
$$\iiint_B \frac{\vec{r}\cdot\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\, d(x_1, x_2, x_3)$$
in Abhängigkeit von $\vec{r}$.

c) Es sei $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) := g(\|\vec{x}\|^2)$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f bei $\vec{x}_0 = (0, 0)$ in Abhängigkeit von $g(0)$ und gegebenenfalls $g'(0)$ oder $g''(0)$.

BITTE WENDEN!

Aufgabe 3: (3 + (6+5+6) = 20 Punkte)

a) Es sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{pmatrix}$, wobei $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Abbildung

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_a : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle_a := \vec{x}^T M \vec{y}.$$

Sie können annehmen, dass diese Abbildung symmetrisch und linear in beiden Komponenten ist. Für welche $a \in \mathbb{R}$ definiert die Abbildung ein Skalarprodukt?

b) Es sei $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein **beliebiges** Skalarprodukt und $|||\cdot||| : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ die von diesem Skalarprodukt erzeugte Norm, also $|||(x_1, x_2)|||^2 = \langle (x_1, x_2) | (x_1, x_2) \rangle$. Wir definieren die Abbildung:

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\langle (x_1, x_2) | (y_1, y_2) \rangle}{|||(x_1, x_2)||| + |||(y_1, y_2)|||} & , (x_1, x_2, y_1, y_2) \neq (0,0,0,0) \\ 0 & , (x_1, x_2, y_1, y_2) = (0,0,0,0) \end{cases} .$$

Es bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^2$. Da alle Normen in $\mathbb{R}^2$ äquivalent sind, existieren $a, b > 0$ so, dass

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \ a \|\vec{x}\| \leq |||\vec{x}||| \leq b \|\vec{x}\| .$$

i) Ist f in $(0,0,0,0)$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii) Zeigen Sie, dass f in $(0,0,0,0)$ partiell differenzierbar ist.

iii) Zeigen Sie, dass f in $(0,0,0,0)$ nicht differenzierbar (d.h. nicht total differenzierbar) ist.

Hinweis für iii): Widerlegen Sie die Differenzierbarkeit zum Beispiel anhand der Definition. Betrachten Sie hierfür zum Beispiel eine Nullfolge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und die Folge $((r_n, r_n, r_n, r_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 4: (8 + (2+3+3) + 4 = 20 Punkte)

a) Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion mit

$$h(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [-\pi, 0] \\ x & , x \in (0, \pi) \end{cases} .$$

Bestimmen Sie die Fourierreihe von h.

b) Es sei $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = \frac{e^{2/z}}{3z}$.

i) Geben Sie die Laurentreihe von g um $z_0 = 0$ an.

ii) Welche Art von Singularität besitzt g in $z_0 = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

iii) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \exp(it)$. Bestimmen Sie $\int_\gamma g(z) dz$.

c) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|$. Bestimmen Sie alle Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$, in denen f komplex differenzierbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.