Lösungshinweise

Hauptklausur 2023
HM 2 - Physik

Kunstmann
Schulz

A1 $A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

i) $\det(A_\alpha) = (\alpha^2 + 2 + 2) - \alpha - 4 - \alpha$ "Regel von Sarrus"

$= \alpha^2 + 4 - 2\alpha - 4$

$= \alpha(\alpha - 2)$

Die Zeilen von A_α sind linear unabhängig falls $\alpha \notin \{0,2\}$ und damit hat A_α für $\alpha \notin \{0,2\}$ vollen Rang.

Falls $\alpha \in \{0,2\}$ ist sind die Zeilen von A_α linear abhängig und demnach hat A_α keinen vollen Rang.

ii) Man kann die EV durch "scharfes hinsehen" raten.
Alternativ verfährt man wie folgt:
Sei nun $\alpha = 0$. Wir bestimmen das charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) = \det(A_0 - \lambda \mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda^2(1-\lambda) + 2 + 2) - (-\lambda - \lambda + 4(1-\lambda))$$

$$= (\lambda^2(1-\lambda) + 4) + (2\lambda - 4(1-\lambda))$$

$$= \lambda^2 - \lambda^3 + 4 + 2\lambda - 4 + 4\lambda$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 6)$$

$$= -\lambda\left(\left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} - 6\right)$$

$$= -\lambda\left(\left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{25}{4}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \lambda = 0$ oder $\lambda - \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \lambda = 0$ oder $\lambda = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ oder $\lambda = \frac{-5}{2} + \frac{1}{2} = -2$

Was den angegebenen Eigenwerten entspricht.

Wir bestimmen die Eigenvektoren

1. Fall $\lambda = 0$

$$A_0 - 0\mathbb{1} = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} - \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ - \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen also den Kern der Matrix mit dem -1-Trick ab.

Es ist $\quad V_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_0)$

Sei $\lambda = -2$ dann ist

$$A_0 + 2\mathbb{1} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ - \\ \\ \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} - \\ 3 \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$1-6$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \frac{2}{5} \\ + \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen also den Kern von $A_0 + 2\mathbb{1}$ mit dem -1-Trick ab.

Es ist $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern}(A_0 - (-2)\mathbb{1})$

Da A_0 symm. ist und die Eigenwerte $\lambda = 0$ und $\lambda = -2$ einfach sind ist der EW $\lambda = 3$ ebenfalls einfach und der EV zum EW $\lambda = 3$ ist orthogonal zu den anderen Eigenvektoren sein.

$$V_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit $V_2 \perp V_1$ muss $V_2 \cdot V_1 = 0 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$

und damit $V_2 \perp V_0$ muss $V_0 \cdot V_1 = 0 \Rightarrow 2x - 2y = 0$

$\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der gesuchte Eigenvektor

$$\text{"}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\text{"}$$

Es bilden V_0, V_1, V_2 eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren und damit gilt für die Basiswechselmatrix

$$S = \begin{pmatrix} | & | & | \\ V_0 & V_1 & V_2 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dass $S^{-1} A_0 S =: D$ diagonalgestalt hat.

b) Es ist $\lambda \in$ spektrum(B^2), d.h $\det(B^2 - \lambda \mathbb{1}) = 0$

Es gilt $B^2 - \lambda \mathbb{1} = (B + \sqrt{\lambda}\mathbb{1})(B - \sqrt{\lambda}\mathbb{1})$

Nach dem Determinantenmultiplikationssatz gilt

$$0 = \det(B^2 - \lambda \mathbb{1}) = \det(B + \sqrt{\lambda}\mathbb{1}) \det(B - \sqrt{\lambda}\mathbb{1})$$

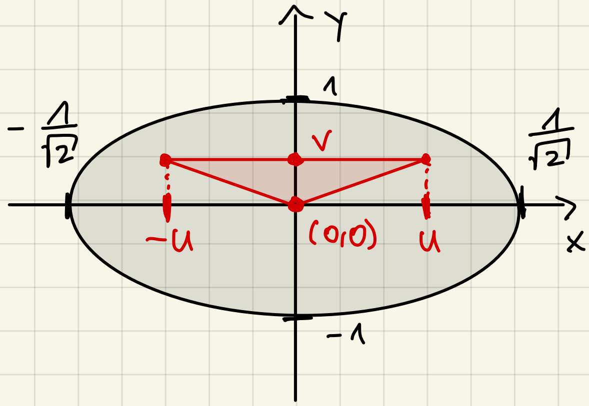
daher ist $\det(B + \sqrt{\lambda}\mathbb{1}) = 0$ oder $\det(B - \sqrt{\lambda}\mathbb{1}) = 0$

Da B positiv definit ist muss $\det(B + \sqrt{\lambda}\mathbb{1}) \neq 0$
da $-\sqrt{\lambda} < 0$ sonst ein Eigenwert wäre.

Es ist also $\det(B - \sqrt{\lambda}\mathbb{1}) = 0$ und daher ist
$\sqrt{\lambda}$ ein EW von B.

A2

a) Wir machen zunächst eine Skizze



Es ist $F(u,v) = uv$ die Fläche des Dreiecks.

Angenommen $2u^2 + v^2 < 1$ dann ex. $\tilde{u}, \tilde{v} > 0$ mit $\tilde{u} \geq u$ und $\tilde{v} \geq v$
so, dass $2\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 = 1$ und $F(\tilde{u}, \tilde{v}) \geq F(u,v)$. Daher
können wir annehmen, dass $2u^2 + v^2 = 1$ gilt.

Wir optimieren demnach die Funktion $F: [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$
unter der Nebenbedingung $h(u,v) = 2u^2 + v^2 - 1 = 0$

Wir wenden die Multiplikationsregel von Lagrange an.

Es ist $L(u,v,\lambda) = F(u,v) + \lambda h(u,v) = uv + \lambda(2u^2+v^2-1)$

die Lagrange die Lagrangefunktion. Es gilt

$$(\nabla L)(u,v,\lambda) = \begin{pmatrix} v + \lambda 4u \\ u + \lambda 2v \\ 2u^2+v^2-1 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen alle kritischen Stellen durch

$$(\nabla L)(u,v,\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} v + 4\lambda u = 0 & 1) \\ u + 2\lambda v = 0 & 2) \\ 2u^2+v^2-1 = 0 & 3) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1) \Rightarrow \\ 2) \Rightarrow \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} v = -4\lambda u \\ u = -2\lambda v \end{array}\right\} \Rightarrow \; v = -4\lambda(-2\lambda)v$$

$$\Rightarrow v = 8\lambda^2 v$$

$$\Rightarrow (1-8\lambda^2)v = 0$$

D.h $v=0$ oder $\lambda = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$

1. Fall $v=0 \Rightarrow F(u,v) = 0$ aber es ex. $(u,v) \in \partial E$ mit $F(u,v) > 0$.

2. Fall $v \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ oder $\lambda = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$

Da $u,v > 0$ und $v + 4\lambda u = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$

$1) \Rightarrow v - \frac{4}{2\sqrt{2}} u = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2}\, u$

Einsetzen in 3) liefert: $2u^2 + 2u^2 - 1 = 0 \Rightarrow u^2 = \frac{1}{4} \underset{u>0}{\Rightarrow} u = \frac{1}{2}$

und wieder mit 3) $\frac{2}{4} + v^2 - 1 = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{1}{2} \underset{v>0}{\Rightarrow} v = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Wir finden also die kritische Stelle $(u,v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

mit $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Da F auf E stetig ist nimmt F sein Max. auf E tatsächlich an. Da F,h als Polynome stetig diff'bar und $\quad \mathrm{Rang}((\nabla h)(u,v)) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 4u \\ 2v \end{pmatrix} \neq 0$ für $(u,v) \neq (0,0)$ ist die Multiplikationsregel von Lagrange anwendbar.

Bei der kritischen Stelle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ist F maximal, da $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) > F(0,1) = F(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ wobei $\{(0,1), (\frac{1}{\sqrt{2}},0)\}$ die restlichen kritischen Stellen sind.

D.h. das Dreieck hat maximalen Flächeninhalt

$$F(u_0,v_0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{für} \quad (u_0,v_0) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

b) $B := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x}_3 \geq 0, \|x\| \leq 1\}$. Sei Φ die Transformation in Kugelkoordinaten aus der Vorlesung, dann gilt nach Transformationssatz

$$\int_B \frac{\vec{r}\cdot\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\, d\vec{x} = \vec{r}\cdot\int_B \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\, d\vec{x} = \vec{r}\int_{\Phi^{-1}(B)(\varrho,\varphi,\theta)} \frac{\begin{pmatrix} \cancel{\varrho}\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cancel{\varrho}\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cancel{\varrho}\cos(\theta)\end{pmatrix}}{\cancel{\varrho}}\, \varrho^2 \sin(\theta)\, d(\varrho,\varphi,\theta)$$

$$= \vec{r}\int_{\Phi^{-1}(B)(\varrho,\varphi,\theta)} \varrho^2 \sin(\theta)\cos(\theta)\, \hat{e}_z\, d(\varrho,\varphi,\theta)$$

Es ist $B = \left\{\begin{pmatrix} \varrho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \varrho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \varrho\cos(\theta)\end{pmatrix} : \varrho \in [0,1],\ \cos(\theta) \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi) \right\}$

da $\varrho\cos(\theta) > 0 \iff \cos(\theta) \in [0,1]$

$$\Rightarrow \int_B \frac{\vec{r}\cdot\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\, d\vec{x} \underset{\text{Substitution } t=\cos(\theta)}{=} \vec{r}_3 \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 \varrho^2 t \, dt\, d\varrho\, d\varphi = 2\pi\, \vec{r}_3 \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 \left[\frac{1}{3}\varrho^3\right]_0^1$$

$$= \pi/3\ \vec{r}_3$$

c) Wir bestimmen das Taylorpolynom zweiter Ordnung.
Es ist

$$T(f,2)(\vec{x}_0+\vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \vec{h}\,\nabla f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\, h^T\, H_f(\vec{x}_0)\, h \qquad (*)$$

f aus der Aufgabenstellung ist als komposition zweimal stetig diff'barer Funktionen hinreichend oft differenzierbar um das Taylorpolynom zu bestimmen.

Es ist $\vec{x}_0 = (0,0)$ und $\vec{h} = (h_1,h_2)$ sowie

$$(\nabla f)(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial x_1 f \\ \partial x_2 f \end{pmatrix}(\vec{x}).$$

und $(\partial x_1 f)(\vec{x}) = \partial x_1\, g(\|\vec{x}\|^2) = \partial x_1\, g(x_1^2+x_2^2)$
$= g'(x_1^2+x_2^2)\, 2x_1$

sowie $(\partial x_2 f)(\vec{x}) = g'(x_1^2+x_2^2)\, 2x_2$

$\Rightarrow\ (\nabla f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir bestimmen noch die Hessematrix. Hierfür bestimmen wir

$\partial^2_{x_1} f(\vec{x}) = \partial x_1 (g'(x_1^2+x_2^2)\, 2x_1) = g''(x_1^2+x_2^2)\, 4x_1$
$+ 2g'(x_1^2+x_2^2)$

$\partial x_1 \partial x_2 f(\vec{x}) = \partial x_1 (g'(x_1^2+x_2^2)\, 2x_2) = g''(x_1^2+x_2^2)\, 4x_1x_2$

$\Rightarrow\ \partial^2 x_1 f((0,0)) = 2g'(0)$ und da $g((x_1,x_2)) = g((x_2,x_1))$
$\Rightarrow\ \partial^2 x_2 f((0,0)) = 2g'(0)$

Sowie $\partial x_1 \partial x_2 f(0) = \partial x_2 \partial x_1 f(0) = 0$ (Satz von Schwartz)

Es ist also $H_f((0,0)) = 2\begin{pmatrix} g'(0) & 0 \\ 0 & g'(0) \end{pmatrix}$

Durch Einsetzen in ⊛ finden wir

$$T(f,2)(\vec{h}) = g(0) + 0 + \frac{1}{2}(h_1,h_2)\; 2\begin{pmatrix} g'(0) & 0 \\ 0 & g'(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= g(0) + (h_1,h_2)\begin{pmatrix} h_1 g'(0) \\ h_2 g'(0) \end{pmatrix}$$

$$= g(0) + (h_1^2 + h_2^2)\, g'(0)$$

$$= g(0) + \|\vec{h}\|^2 g'(0)$$

A3, a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ mit $\langle x,y\rangle_a = x^T M y$

Damit $\langle\cdot|\cdot\rangle_a$ ein Skalarprodukt ist muss $\langle\cdot|\cdot\rangle_a$ symm., linear in beiden Komponenten sowie positiv definit in $\mathbb{R}^2$ sein.

Symmetrie und Linearität sind vorgegeben wir prüfen also die pos. Definitheit.

Es muss $\langle x,x\rangle_a > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}^2$ gelten, d.h. $x^T M x > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}^2$. Dies ist gerade die Def. der pos. Definitheit für die Matrix M.

Wir verwenden das Hurwitz-Kriterium und untersuchen die Hauptminoren.

Es ist $\det(1) = 1 > 0$ sowie $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{pmatrix} = a - 9 > 0$

$\Leftrightarrow a > 9$

Nach Hurwitz ist M also pos. definit gdw. $a > 9$ und damit $\langle \cdot | \cdot \rangle_a$ ein Skalarprodukt gdw. $a > 9$.

b)

(i) Wir klären die Stetigkeit in $(0,0,0,0)$.

Sei hierfür $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$ eine Folge mit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0,0,0)$.

D.h $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\vec{y}_n)_{n\in\mathbb{N}})$

mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ mit $(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$, $(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

Es ist
$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \frac{\langle x_n, y_n \rangle}{|||x_n||| + |||y_n|||}$$
$$\underset{\substack{\text{Cauchy}\\ \text{Schwarz}\\ \text{UGL}}}{\leq} \frac{|||x_n|||\ |||y_n|||}{|||x_n||| + |||y_n|||}$$
$$= \underbrace{\frac{|||x_n|||}{|||x_n||| + |||y_n|||}}_{\leq 1} |||y_n|||$$
$$\leq |||y_n||| \leq b\,\|y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Damit ist f in $(0,0,0,0)$ stetig

ii) Es sei $\hat{e}_i = (0,0,\underset{\substack{\nearrow\\ \text{i'te stelle}}}{1},0)$ für $i \in \{(1,2,3,4)\}$ der i-te Einheitsvektor.

Es gilt:

$$\partial x_i f(\vec{x}_0) = \frac{df}{d\hat{e}_i}(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\hat{e}_i)}{t}$$

ist bzgl. x_i partiell differenzierbar in $\vec{x}_0$ falls Grenzwert auf der Rechten Seite existiert.
Sei also $t \neq 0$ und $\vec{x}_0 = (0,0,0,0)$ dann gilt

$$f(\vec{x}_0 + t\hat{e}_i) = f(t\hat{e}_i) = \frac{t \langle ((\hat{e}_i)_1, (\hat{e}_i)_2) \,|\, ((\hat{e}_i)_3, (\hat{e}_i)_4) \rangle}{|||t((\hat{e}_i)_1, (\hat{e}_i)_2|||+|||t((\hat{e}_i)_3, (\hat{e}_i)_4)|||}$$

Da entweder $((\hat{e}_i)_1, (\hat{e}_i)_2) = (0,0)$ oder $((\hat{e}_i)_3, (\hat{e}_i)_4) = (0,0)$ ist $\langle ((\hat{e}_i)_1, (\hat{e}_i)_2) \,|\, ((\hat{e}_i)_3, (\hat{e}_i)_4) \rangle = 0$ (Definitheit) aber Gleichzeitig

$$|||t((\hat{e}_i)_1, (\hat{e}_i)_2||| \neq 0 \quad \text{oder} \quad |||t((\hat{e}_i)_3, (\hat{e}_i)_4)||| \neq 0$$

Damit ist dann $f(t\hat{e}_i) = 0$ für jedes $t > 0$ und

somit $\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\hat{e}_i)}{t} = 0$.

Da $i \in \{1,2,3,4\}$ beliebig war folgt die Existenz aller partiellen Ableitungen.

iii) Wir zeigen, dass f in $(0,0,0,0)$ <u>nicht</u> differenzierbar ist. Es sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$.

Wir untersuchen die Folge: $((r_n, r_n, r_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ was eine Nullfolge in $\mathbb{R}^4$ ist.

Da f partiell diff'bar ist kommt nur $f'(0) = (0,0,0,0)^T$ nach ii) als Ableitung in Frage. Damit f in $(0,0,0,0)$ diff'bar ist muss der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f(\vec{x}_n) - \overbrace{f((0,0,0,0))}^{=0} - \overbrace{f'(0)\,\vec{x}_n}^{=0}|}{\|\vec{x}_n\|_{\mathbb{R}^4}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|f(\vec{x}_n)|}{\|\vec{x}_n\|_{\mathbb{R}^4}}$$ existieren.

$$|f(\vec{x}_n)| = \frac{|\langle (r_n,r_n),(r_n,r_n)\rangle|}{|||(r_n,r_n)||| + |||(r_n,r_n)|||} = \frac{|||(r_n,r_n)|||^{\cancel{2}}}{2\,\cancel{|||(r_n,r_n)|||}}$$

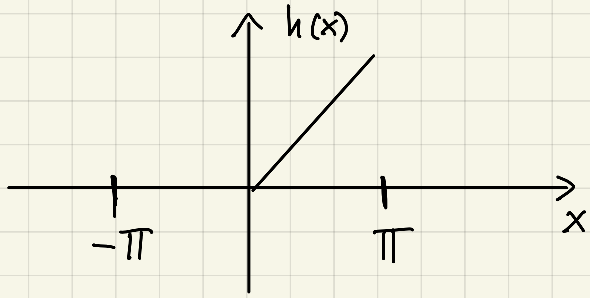
$$\Rightarrow \frac{|f(\vec{x}_n)|}{\|\vec{x}_n\|_{\mathbb{R}^4}} = \frac{|||(r_n,r_n)|||}{2\,\|(r_n,r_n,r_n,r_n)\|_{\mathbb{R}^4}}$$

$$= \frac{|||(r_n,r_n)|||}{2\left(\|(r_n,r_n)\|^2 + \|(r_n,r_n)\|^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{|||(r_n,r_n)|||}{2\sqrt{2}\,\|(r_n,r_n)\|} \geq \frac{a}{2\sqrt{2}} \frac{\cancel{\|(r_n,r_n)\|}}{\cancel{\|(r_n,r_n)\|}} > 0$$

Damit gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{|f(\vec{x}_n)|}{\|\vec{x}_n\|_{\mathbb{R}^4}} \geq \frac{b}{2\sqrt{2}} > 0$. Dann folgt die Behauptung direkt.

A4) Wir skizzieren die Abbildung zunächst.



Wir bestimmen die reellen Fourier-koeffizienten.

Es ist

$$a_k(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(kt)\, dt$$

1. Fall $k=0 \Rightarrow a_0(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t\, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} t^2\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$

2. Fall $k>0 \Rightarrow a_k(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(kt)\, dt$

$$\underset{P.I}{=} \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(kt)}{k} t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{k}\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi k^2}(\cos(k\pi) - 1)$$

$$= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}$$

$$= \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{-2}{\pi k^2} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Es ist: $b(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(kt)\, dt$

$$\underset{k>0}{=} \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-\cos(kt)}{k} t\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(kt)}{k}\, dt\right)$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{\pi k} + \frac{1}{\pi k}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} = -\frac{(-1)^k}{\pi k^2}$$

Nach der Vorlesung gilt also für die Fourierreihe

$$h(t) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \cos((2k-1)t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k^2} \sin(kt)$$

b) i) Mithilfe der Definition der Exponentialfunktion ist

$$\frac{e^{2/z}}{3z} = \frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{-n}}{n!}$$

$n+1=k$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3n!} z^{-(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3(k-1)!} z^{-k} = \sum_{\ell=-\infty}^{-1} \frac{2^{-(\ell+1)}}{3(-(\ell+1))!} z^{\ell}$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b_\ell z^\ell$$

mit $b_\ell = \begin{cases} \frac{z^{-(\ell+1)}}{3(-(\ell+1))!} & \ell \leq -1 \\ 0 & \ell > -1 \end{cases}$

ist die gesuchte Laurentreihe

ii) g ist auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorph als Komposition holomorpher Fkt. und hat in $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität die nicht hebbar ist, denn

$\lim_{z\to 0} \frac{e^{2/z}}{z}$ ex. nicht. (trivial)

Es handlt sich nicht um einen Pol n-ter Ordnung, denn $\lim_{z\to 0} z^n \frac{e^{2/z}}{z} = \lim_{z\to 0} z^{n-1} e^{2/z}$ ex. nicht denn $$z^{k-1} e^{2/z} = z^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3n!} z^{-(n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3n!} z^{-(n+1)+k-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3n!} z^{(k-n)-2}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{k-2} \frac{2^n}{3n!} z^{(k-n)-2}}_{\xrightarrow[z\to 0]{} 0} + \underbrace{\sum_{n=k-1} \frac{2^n}{3n!} 3^{(k-n)-2}}_{\text{ex. nicht für } z\to 0}$$

Demnach muss es sich um eine wesentliche Singularität in $z_0=0$ handeln.

iii) Wir bestimmen das Residuum $\mathrm{Res}(g,z_0)$.

Durch ablesen in der Laurentreihe finden wir

$\mathrm{Res}(g,z_0) = b_{-1} = 1/3$ (siehe i)

Da g auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorph und die reguläre Kurve γ die wesentliche Singularität einmal in pos. Richtung umrundet gilt nach dem Residuen-Satz

$$\int_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(g,z_0) = \frac{2\pi i}{3}$$

c) Wir untersuchen $f(z) = |z|$ auf komplexe Differenzierbarkeit.

Als reelle Fkt wäre f in $z=0$ nicht diffbar also gilt dies auch nicht für $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Für alle andere Fälle überprüfen wir die Differenzierbarkeit anhand der Def.

Damit f in $z_0 \in \mathbb{C}$ diff'bar ist muss

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existieren.}$$

Wir zeigen das f in keinem $z_0 \in \mathbb{C}$ diff'bar ist

Sei hierfür $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ $r_0 \in (0, \infty)$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$

und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $r_n \to r_0$ sowie $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\varphi_n \to \varphi_0$

dann ist für $z_n := r_n e^{i\varphi_0}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{r_n - r_0}{r_n e^{i\varphi_0} - r_0 e^{i\varphi_0}}$$

$$= e^{-i\varphi_0} \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{r_n - r_0}{r_n - r_0}}_{=1} = e^{-i\varphi_0} \neq 0$$

aber Gleichzeitig für $\tilde{z}_n = r_0 e^{i\varphi_n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(\tilde{z}_n) - f(z_0)}{\tilde{z}_n - z_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{r_0 - r_0}{\underbrace{r_0 (e^{i\varphi_n} - e^{i\varphi_0})}_{\neq 0}} = 0$$

Damit ex. $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ nicht und f ist in kein $z_0 \in \mathbb{C}$

„$z_0 = 0$“ haben wir als Spezialfall bereits geklärt.