## Aufgabe 1

a) $y' + \frac{x}{1-x^2}\, y + \frac{1}{1-x^2} = 0 \;, \; |x|<1 \qquad \underline{(1)}$

linear, inhomogen, erster Ordnung

$\int^x \frac{t\,dt}{1-t^2} = \ln \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \rightsquigarrow$ bilde $\underline{(1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ :

$$\left(y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = - \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\int \to \quad y(x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\text{Hinweis}}{=} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c \to \underline{y(x) = -x + c\sqrt{1-x^2}} \quad (*)$$

$|x|<1$, $c$ beliebig Konstant $\in \mathbb{R}$

(allgemeine Lösung)

b) $y(0) = 1 \xrightarrow{(*)} c = 1 \to \underline{y(x) = -x + \sqrt{1-x^2}}$

c) Beachte $(e^{y(x)})' = e^{y(x)}\, y'(x)$. Mit $v(x) = e^{y(x)}$

(bzw: $y(x) = \underline{\ln v(x) \; (= f(v(x)))}$) wird (+) zu

$$\underline{(1-x^2)\, v'(x) + x\, v(x) + 1 = 0}$$

d) Nach a) gilt $v(x) = -x + c\sqrt{1-x^2}$

$$\to \quad \underline{y(x) = \ln \left| -x + c\sqrt{1-x^2} \right| \;, \; |x|<1}$$

$c$ beliebig konst

$c\sqrt{1-x^2} \neq x$

## Aufgabe 2

a) Subtrahiere die 3. von der 2. Zeile $(Z2-Z3)$ und die 4. von der 3. Zeile $(Z3-Z4)$:

$$A \xrightarrow[Z3-Z4]{Z2-Z3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\text{rang}(A) = 2}$$

b) $A\vec{x} = \vec{0} \xrightarrow{a)} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \quad x_2 + x_3 + x_4 = 0$

Mit $x_3 = s$, $x_4 = t$ erhält man die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $\vec{x}_h = s\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $s,t \in \mathbb{R}$.

$\underline{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ ist Basis von } \ker(A).}$

Bild(A) wird von den Spalten von **A** aufgespannt. Da dim Bild(A) = 2, ist z.B. $\underline{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix} \text{ eine Basis von Bild}(A).}$

c) Mittels Umformungen wie unter a) geht $A\vec{x} = \vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}$

über in:

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_3 - a_2 \\ a_4 - a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 3(a_3 - a_2) = a_4 - a_2 \\ a_3 - a_2 = -a_1 \end{array}$$

oder: $\underline{3a_3 - 2a_2 = a_4, \quad a_1 = a_2 - a_3} \quad (**)$

d) Für $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, $a_3 = 5$, $a_4 = 1$ wird $(**)$ erfüllt.

Die allgemeine Lösung von $A\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\7\\5\\1\end{pmatrix}$ ist:

$\underline{\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p}$, $\vec{x}_h$ von oben aus b); $\vec{x}_p$ eine Lösung: Setze in $(*)$ $a_2 = 7$, $a_1 = 2$, $x_3 = x_4 = 0 \rightarrow x_2 = 2, x_1 = 1$: $\underline{\vec{x}_p = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}}$

Aufgabe 3

$$f(x,y) = y^3 + x^2y - 3y$$

a) $D_1 f = 2xy$ , $D_2 f = 3y^2 + x^2 - 3$ , $D_1^2 f = 2y$, $D_2^2 f = 6y$, $D_1 D_2 f = 2x$

$D_1 f = 0$ und $D_2 f = 0$ hat die vier Lösungen $(0, \pm 1)$, $(\pm\sqrt{3}, 0)$.
Diese Punkte sind Kandidaten für lokale Extrema.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 6y \end{pmatrix} \to H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 6 \end{pmatrix}, H_f(\pm\sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{3} \\ \pm 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

In $(\pm\sqrt{3}, 0)$ ist $H_f$ indefinit, hier liegen keine Extremwerte.

In $(0,1)$ ist $H_f$ positiv definit: In $(0,1)$ liegt für $f$ ein lokales Min
$f(0,1) = -2$

In $(0,-1)$ ist $H_f$ negativ definit: In $(0,-1)$ liegt ein lokales Max $f(0,-1) = 2$

b) $f(x,y) = y^3 + x^2y - 3y$ , $g(x,y) = x^2 + 3y^2 - 9 = 0$

Betrachte $h(x,y,\lambda) = y^3 + x^2y - 3y + \lambda(x^2 + 3y^2 - 9)$ (Lagrange Ansatz)

$D_1 h = 2x(y+\lambda)$ , $D_2 h = 3y^2 + x^2 + 6y\lambda - 3$, $D_3 h = x^2 + 3y^2 - 9$

$D_1 h = D_2 h = D_3 h = 0 \to$

1. $x = 0$ , $y = \pm\sqrt{3}$ $\left(\lambda = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$: $f(0, \pm\sqrt{3}) = 0$

2. $(\lambda = -y) \to$ $y = \pm 1, x = \pm\sqrt{6}$

$f(\pm\sqrt{6}, 1) = 4$ , $f(\pm\sqrt{6}, -1) = -4$

Bei $(\pm\sqrt{6}, 1)$ liegen die absoluten Max, bei $(\pm\sqrt{6}, -1)$ die absoluten Minima von $f$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

VD HM II 26.9.2005

Aufgabe 4

a) $\vec{w}$ ist in $\mathbb{R}^3$ (einfach zshgd) Gradientenfeld $\Leftrightarrow \nabla \times \vec{w} = \vec{0}$ in $\mathbb{R}^3$

$$\Leftrightarrow \partial_y w_1 = \partial_x w_2 \,,\ \partial_x w_3 = \partial_z w_1 \,,\ \partial_y w_3 = \partial_z w_2$$

$$\Leftrightarrow \underline{b = 1 \,,\quad a = 2} \,,\quad 0 = 0 \checkmark$$

Es ist $\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x + y + 2z \\ x \\ 2x + 4z \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^3$ ein Gradientenfeld.

Deshalb gilt (Vorlesung / $\gamma$ ist geschlossene Kurve) $\underline{\oint_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s} = 0}$.

b) 1. (direkt) ($\vec{N}$ äußere E-Normale)

$$\underline{\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{N}\, ds} = \int_{-1}^{+1} \vec{v}(x,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx + \int_0^\pi \vec{v}(\cos t, \sin t) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt$$

$$= 0 + \int_0^\pi \cos t \, dt = \underline{0}$$

2. (Divergenzsatz) (Hierfür muss $\vec{N}$ äußere E-Normale sein)

$$\underline{\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{N}\, ds} = \iint_G \nabla \cdot \vec{v}\, d(x,y) = \iint_G 3x \, d(x,y)$$

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{t=0}^{\pi} 3 r \cos t \; r \, dt \, dr = \underline{0} \,.$$

da $\int_0^\pi \cos t \, dt = 0$