UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Herbst 2006
25.09.2006

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (8 Punkte)

a) Gegeben seien die 3 Punkte

$$A = (0,0)\,, \qquad B = (2,2)\,, \qquad C = (4,0)\;.$$

Bestimme einen Punkt $P = (x, y)$ so, dass die Summe der Quadrate der Abstände von den drei gegebenen Punkten ein Minimum wird.

b) Bestimme das Volumen der Menge

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 5,\ 0 \le z \le 4 - x^2\}\;.$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben ist das Vektorfeld

$$V = \begin{pmatrix} yx + y^2 \\ x^3 + y \end{pmatrix}\;.$$

a) Berechne das Wegintegral von $(1,0)$ nach $(0,1)$ entlang der zwei folgenden Wege. Der erste Weg geht die direkte Strecke von $(1,0)$ nach $(0,1)$. Der zweite Weg geht von $(1,0)$ nach $(0,0)$ und dann nach $(0,1)$ entlang der jeweiligen Verbindungsgeraden.

b) Berechne den Durchfluss $\oint\limits_c \langle V, n\rangle ds$ durch den Rand c des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0),\ (0,1)$ und $(1,0)$ mittels des Gaussschen Integralsatzes im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

a) Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y\;, \\ y' &= x + 3y + 2z\;, \\ z' &= z\;. \end{aligned}$$

b) Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\;.$$

Bestimme die Orthogonalprojektion des Punktes $P = (4,2,4,0)$ auf $E = \text{spann}\,(v_1, v_2)$.

– bitte wenden –

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Sei $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-(x^2+y^2)}\right\}$ und

$$V = \begin{pmatrix} xz^2 \\ x^2y - z^3 \\ 2xy + y^2 z \end{pmatrix} .$$

a) Bestimme div V.

b) Schreibe S in Kugelkoordinaten.

c) Berechne

$$\int\limits_{\partial S} \langle V, n \rangle \, do$$

mittels des Satzes von Gauss und Einführen von Kugelkoordinaten.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gegeben ist die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

für $t \in \mathbb{R},\ x \in [0,\pi]\,,\ u(x,t) \in \mathbb{R}$ und den Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

a) Suche Lösungen der Form $u(x,t) = (c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t) \sin kx$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$, d.h. bestimme ω in Abhängigkeit von k.

b) Wie lautet die Lösung zur Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0\,? \end{aligned}$$

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Dienstag, dem 10.10.2006, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, den 24.10.2006, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 30.10.06 bis 03.11.06.

Die allgemeine Klausureinsicht (siehe Aushang) ist am Mittwoch, den 8.11.2006, von 15.45 bis 17.15 Uhr im Seminarraum S 34 (Mathematikgebäude).