D HM II 25. 9. 2006

gabe 1

. Funktion

$$x, y) = x^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 + (x-4)^2 + y^2$$
$$= x^2 + y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + x^2 - 8x + 16 + y^2$$
$$= 3x^2 - 12x + 3y^2 - 4y + 24$$

bt die Summe der Quadrate der Abstände eines Punktes mit den Koordinaten (x, y) von den drei Punkten A, B und C an. Gesucht ist ein Minimum von f. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (6x - 12 \quad 6y - 4)$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = 0 \iff x = 2 \text{ und } y = \frac{2}{3}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$ ist positiv definit für alle $x, y \in \mathbb{R}$, also auch für $x = 2$ und $y = \frac{2}{3}$.

Also wird im Punkt $P = (2, \frac{2}{3})$ die Summe der Quadrate der Abstände von den drei gegebenen Punkten ein Minimum.

1b)

$$\text{Volumen}(S) = \int_S d(x,y,z)$$

$$= \int_0^5 \int_{-2}^{2} \int_0^{4-x^2} 1 \, dz \, dx \, dy$$

$$= \int_0^5 \int_{-2}^{2} 4-x^2 \, dx \, dy$$

$$= \int_0^5 \left(4x - \tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2} \, dy$$

$$= \int_0^5 \left(8 - \tfrac{8}{3} + 8 - \tfrac{8}{3}\right) \, dy$$

$$= 5 \cdot \frac{32}{3} = \frac{160}{3}$$

Aufgabe 2

a)

Sei γ_1 die direkte Strecke von $(1,0)$ nach $(0,1)$.
Eine Parametrisierung von γ_1 ist

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \quad , \; 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{\gamma_1} \langle V(x), dx \rangle = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t(1-t)+t^2 \\ (1-t)^3 + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)^3 \, dt = \frac{1}{4}(1-t)^4 \Big|_1^0 = \frac{1}{4}$$

Sei γ_2 die Verbindungsgerade von $(1,0)$ nach $(0,0)$ und γ_3 die Verbindungsgerade von $(0,0)$ nach $(0,1)$. Parametrisierungen von γ_2 und γ_3 sind zum Beispiel

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \; 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \quad , \; 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{\gamma_2 \cup \gamma_3} \langle V(x), dx \rangle = \sum_{i=2}^{3} \int_{\gamma_i} \langle V(x), dx \rangle$$

$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ (1-t)^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$+ \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

b)
Sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$. Dann gilt

$$\oint_c \langle V, n \rangle \, ds = \int_D \operatorname{div} V(X) \, dX$$

$$= \int_D y+1 \, d(x,y)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} y+1 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} y^2 + y\right) \Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \tfrac{1}{2}(1-x)^2 + 1-x \, dx$$

$$= \int_0^1 \tfrac{1}{2} x^2 - 2x + \tfrac{3}{2} \, dx$$

$$= \tfrac{1}{6} x^3 - x^2 + \tfrac{3}{2} x \Big|_0^1$$

$$= \tfrac{1}{6} - 1 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{2}{3}$$

Aufgabe 3

a)

Schreibe die Dgl. als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right]$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4)$$

Eigenwerte von A: $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 4$

Eigenvektoren:

$\lambda = 1$: $(A - I)\, v_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\lambda = 2: \quad (A - 2I)\, v_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

$\lambda = 4: \quad (A - 4I)\, v_4 = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} v_4 = 0$$

$$\Rightarrow v_4 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

Die allgemeine Lösung des Dgl.-systems ist somit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{4t} \end{pmatrix},$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

3b)

Bestimmung einer ONB $\{w_1, w_2\}$ von E

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Orthogonalprojektion von P auf E ist gleich

$$\frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{14} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{7}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 \\ 14/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

a)

$$\operatorname{div} V = z^2 + x^2 + y^2$$

b)

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \leq r \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

c)

$$\int_{\partial S} \langle V, n \rangle \, do = \int_S \operatorname{div} V \, dX$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5} r^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} \pi$$

(Beachte hierbei, dass in Kugelkoordinaten $\operatorname{div} V = r^2$ ist.)

gabe 5

$$u_t(x,t) = (c_1 w \cos wt - c_2 w \sin wt) \sin kx$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = -(c_1 w^2 \sin wt + c_2 w^2 \cos wt) \sin kx$$

$$= -w^2 u(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -k^2 u(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow w(k) = \pm k$$

b)

Die Lösung ist

$$u(x,t) = \cos t \sin x + \frac{1}{3} \cos 3t \sin 3x .$$

(Um auf die Lösung zu kommen, kann man z. B. die Lösung als Summe der Lösungen aus Teilaufgabe a) schreiben und dann die jeweiligen Koeffizienten c_1, c_2 so bestimmen, dass die Anfangsbedingung aus b) erfüllt ist. Alternativ kann man z. B. auch so vorgehen wie in der Übungsaufgabe 5.1 aus HM II, Sommersemester 06.)