UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS

Herbst 2007
24.09.2007

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -18 & 8 \end{pmatrix} .$$

b) Geben Sie die allgemeine Lösung $u = u(x)$ und $v = v(x)$ des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} u' &= -7u + 3v + 2, \\ v' &= -18u + 8v + 4 \end{aligned}$$

an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Durch

$$M_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 - x_4 = 0 \text{ und } x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$$

und

$$M_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ und } x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$$

sind Mengen im $\mathbb{R}^4 = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_j \in \mathbb{R}\}$ gegeben.

a) Begründen Sie, dass M_1 und M_2 reelle Vektorräume sind. Geben Sie für M_1 und M_2 jeweils eine Basis an. Geben Sie die Dimension von M_1 und M_2 an.

b) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in M_1 \cap M_2$.

c) Begründen Sie, dass sich jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ eindeutig in der Form $\vec{x} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$ mit $\vec{m}_1 \in M_1$ und $\vec{m}_2 \in M_2$ darstellen lässt.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

sowie der $\mathbb{R}^3$ durch $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)^\top : x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

a) Skizzieren Sie den Schnitt des Graphen von f mit der $x-z$–Ebene.

b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)^\top$.

c) Begründen Sie, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ gilt.

d) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z^2 - \cos^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$$

in der Nähe des Punktes $(x,y,z)^\top = (0,0,-1)^\top$ eindeutig nach z aufgelöst werden kann. Die Auflösung werde mit $z = g(x,y)$ bezeichnet.
Bestimmen Sie $\nabla g(0,0)$. Geben Sie die Funktion g explizit an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix} \quad \text{gegeben,}$$

sowie die Menge $\mathcal{F} = \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{1}{2}(x^2+y^2),\ 0 \le z \le 2\}$. Es sei C die Randkurve von $\mathcal{F}$.

a) Berechnen Sie $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$ direkt.

b) Berechnen Sie $\iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o}$ direkt.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Dienstag, dem **09.10.2007**, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer **mündlichen** Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, den **23.10.2007**, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom **29.10.2007** bis **02.11.2007**.

Die **allgemeine** Klausureinsicht (siehe Aushang) findet am Mittwoch, den **07.11.2007**, von 15.45 bis 17.15 Uhr im Seminarraum S 34 (Mathematikgebäude) statt.