Höhere Mathematik II

Lösungen zur Vordiplomklausur

Herbst 2007

① a) $$0 \stackrel{!}{=} \det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -7-\lambda & 3 \\ -18 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+7)(\lambda-8)+54 = \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

EWe: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

EVe:

zu $\lambda_1 = -1$: $(A-\lambda_1 E)\vec{x} \stackrel{!}{=} \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -18 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu $\lambda_2 = 2$: $(A-\lambda_2 E)\vec{x} \stackrel{!}{=} \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -18 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Das Gleichungssystem lässt sich in Matrixschreibweise schreiben:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{=:\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Multiplikation beider Seiten mit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$ von links liefert

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}' \\ \tilde{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

also das entkoppelte System

$$\tilde{u}' = -\tilde{u} + 2$$

$$\tilde{v}' = 2\tilde{v}$$

mit der allgemeinen Lösung $\tilde{u}(x) = C_1 e^{-x} + 2$, $\tilde{v}(x) = C_2 e^{2x}$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Damit lösen die Funktionen $u = u(x)$ und $v = v(x)$ mit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{v}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 2 \\ 2C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{2x} + 4 \end{pmatrix}$$

das angegebene Differentialgleichungssystem.

Aufgabe 2

a) Es bezeichne $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$(\mathbb{R}^4 \ni)\, \vec{x} \in M_1 \longleftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$
$(\mathbb{R}^4 \ni)\, \vec{x} \in M_2 \longleftrightarrow B\vec{x} = \vec{0}$

} M_1, M_2 sind als Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme (reelle) Vektorräume.

Man liest sofort ab: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B) = 2$. Die Anzahl der Unbekannten ist jeweils 4. Vorlesung $\rightarrow$ $\dim M_1 = \dim M_2 = 2$

$\vec{b}_1, \vec{b}_2$: Basis von M_1 : $A\vec{x} = \vec{0} \longleftrightarrow x_1 = -x_3 + x_4 = -x_2$. Setze $x_3 = 1, x_4 = 0$ und $x_3 = 0, x_4 = 1$ $\longrightarrow$: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b}_3, \vec{b}_4$: Basis von M_2 : $B\vec{x} = \vec{0} \longleftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -x_3 - x_4 \rightarrow$ $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

b) $\vec{x} \in M_1 \cap M_2 \rightarrow$ es gibt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit $\alpha \vec{b}_1 + \beta \vec{b}_2 = \gamma \vec{b}_3 + \delta \vec{b}_4$.

$\longleftrightarrow$ Mit $C := [\vec{b}_1, \vec{b}_2, -\vec{b}_3, -\vec{b}_4]$ gilt $C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Es ist $\det C = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$

$\rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \rightarrow M_1 \cap M_2 = \{\vec{0}\}$

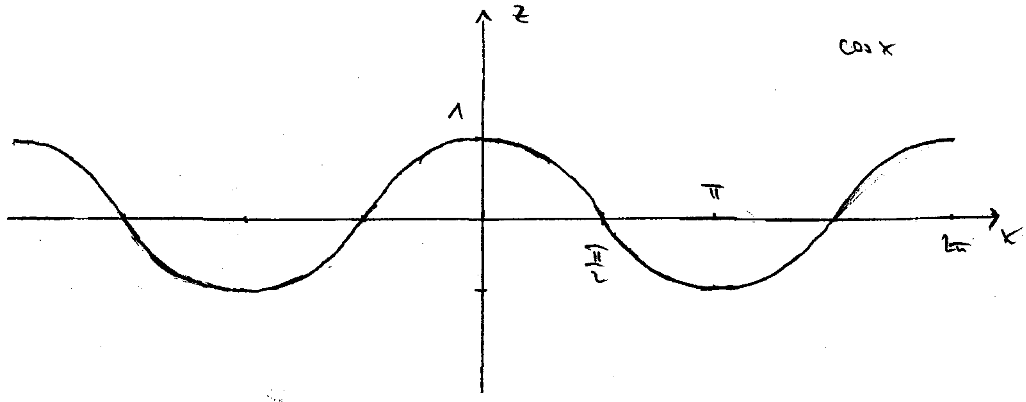
c) Gemäß b) sind $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ im $\mathbb{R}^4$ l.u.. Sie bilden somit eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ beliebig, so gibt es eindeutig Zahlen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ mit $\vec{x} = \underbrace{\beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2}_{\vec{m}_1} + \underbrace{\beta_3 \vec{b}_3 + \beta_4 \vec{b}_4}_{\vec{m}_2}$

a) $\Rightarrow$ $= \vec{m}_1 + \vec{m}_2$

③

a) Schnitt: Graph mit x-z-Ebene, also $y=0$:

$$f(x,0) = \cos(\sqrt{x^2}) = \cos|x| = \cos x.$$



b)

$$\frac{d}{dx} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right) = -\sin(0) = 0$$

genauso: $\frac{d}{dy} f(0,0) = (\cos y)'_{|y=0} = 0$

c) Es ist

$$\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \underbrace{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{2k}}_{=(x^2+y^2)^k}$$

$$= 1 + \frac{x^2+y^2}{2!} + \frac{(x^2+y^2)^2}{4!} + \dots \quad \in C(\mathbb{R}^2),$$

und damit für $x \neq 0$ oder $y \neq 0$:

$$\frac{d}{dx} f(x,y) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k)!} (x^2+y^2)^{k-1} \cdot (2x)}_{\text{stetig in } x \text{ und } y \text{ mit}}$$

$\frac{d}{dx} f(x,y) \to 0$ für $\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$.

genauso $$\frac{d}{dy} f(x,y) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!}\, y\, (x^2+y^2)^{k-1}}_{\text{stetig in } x \text{ und } y \text{ mit}}$$

$\frac{d}{dy} f(x,y) \to 0$ für $\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$

Die partiellen Ableitungen sind somit stetig, also gilt $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

d) Nach c) ist die Funktion $F(x,y,z) = z^2 - \cos^2(\sqrt{x^2+y^2}) \in C^1(\mathbb{R}^3)$, und es gilt $\frac{d}{dz} F(x,y,z) = 2z$.

Wegen $F(0,0,-1) = 1 - 1 = 0$ und $\frac{d}{dz} F(0,0,-1) = -2 \neq 0$, kann nach dem Satz über implizit definierte Funktionen die angegebene Gleichung in der Nähe des Punktes $(0,0,-1)^T$ eindeutig nach z aufgelöst werden.

Es ist
$$\nabla g(0,0) = -\left(\frac{d}{dz} F(0,0,-1)\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} F(0,0,-1) \\ \frac{d}{dy} F(0,0,-1) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{Kettenregel} \\ + b)}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Auflösung ist gegeben durch $g(x,y) = -\cos(\sqrt{x^2+y^2})$.
Beweis mittels Einsetzen (und Satz über implizit definierte Funktionen).

Aufgabe 4

a) Es ist $C = \{(x,y,z) \mid z = \frac{1}{2}(x^2+y^2),\ z = 2\}$.

Eine Parameterdarstellung von C ist: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 2 \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 2\pi.$

Wegen $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$ und mit $\int_C \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$

erhält man: $\int_C \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 3\cdot 2\sin t \\ -2\cdot 2\cos t \\ 4\cdot 2\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$$= \int_0^{2\pi} (-12\sin^2 t - 8\cos^2 t)\,dt = -8\cdot 2\pi - 4\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt \overset{\text{Bronstein}}{=} -16\pi - 4\pi$$

$$= \underline{-20\pi}$$

b) $\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2+x \\ 0 \\ -z-3 \end{pmatrix}$

Parameterdarstellung für F: $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{pmatrix},\ x^2+y^2 \le 4,\ \partial_1\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix},\ \partial_2\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \end{pmatrix}$

$\partial_1\vec{r} \times \partial_2\vec{r} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix} \to (\nabla\times\vec{v})\cdot(\partial_1\vec{r}\times\partial_2\vec{r}) = -z^2x - x^2 - z - 3$

$$\longrightarrow \iint_F (\nabla\times\vec{v})\cdot d\vec{o} = \iint_{x^2+y^2\le 4} (-z^2x - x^2 - z - 3)\Big|_{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,d(x,y)$$

ebene Polarkoordinaten $(z = \frac{1}{2}r^2)$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} \left(-\frac{1}{4}r^4 r\cos\varphi - r^2\cos^2\varphi - \frac{1}{2}r^2 - 3\right) r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{r=0}^{2} \left(-r^3\frac{1}{2}2\pi - 2\pi\frac{r^3}{2} - 6\pi r\right)dr = -2\pi\,\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2 - 3\pi r^2\Big|_0^2$$

$$= -8\pi - 12\pi = \underline{-20\pi}$$