Diplom–Vorprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Die Abbildungen $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien definiert durch:

$$S(x,y,z) := \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

a) Begründen Sie, dass S und T bijektiv sind.

b) Berechnen Sie für $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ $\quad (T \circ S)^{-1}(u,v,w)$.

c) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

berechne man A^2, A^3, A^4.

Formulieren Sie eine Vermutung, wie $A^n (n \in \mathbb{N})$ aussieht. Beweisen Sie diese Vermutung mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei V die Menge aller Folgen in $\mathbb{C}$, für die nur endlich viele Folgenglieder ungleich Null sind. Durch die Additionsvorschrift

$$(a_j)_{j\in\mathbb{N}} + (b_j)_{j\in\mathbb{N}} := (a_j + b_j)_{j\in\mathbb{N}} \qquad (\text{für } (a_j)_{j\in\mathbb{N}}, (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in V)$$

und die skalare Multiplikation

$$\lambda(a_j)_{j\in\mathbb{N}} := (\lambda a_j)_{j\in\mathbb{N}} \qquad (\text{für } \lambda \in \mathbb{C}, (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in V)$$

wird V zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$. Durch

$$\langle (a_j)_{j\in\mathbb{N}}, (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} a_j \bar{b}_j$$

wird auf V ein Skalarprodukt definiert. Dies alles müssen Sie nicht beweisen.

a) Wie sieht die Norm $\|\cdot\|$ aus, die durch dieses Skalarprodukt induziert wird?

b) Finden Sie eine Orthonormalbasis von V und begründen Sie, dass dies eine Basis ist.

c) Seien $a_1 := 1$, $a_2 := i$, $a_3 := -1$, $a_4 := -i$, $a_5 := 2008$ und $a_j = 0$ für $j > 5$. Finden Sie Folgen $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(c_j)_{j\in N}$ in V, für die gelten:

$$(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ steht senkrecht auf } (a_j)_{j\in\mathbb{N}}, \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\| = 1 \text{ und } \langle (a_j)_{j\in\mathbb{N}}, (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \rangle = 1 ,$$

und berechnen Sie $\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

b) Berechnen Sie ∇f und untersuchen Sie ∇f auf Stetigkeit.

c) Untersuchen Sie f auf Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit.

d) Sei $\vec{v} := \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $D_{\vec{v}} f(\sqrt{e}, 0)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Es sei γ der Kreis in der (x,y)–Ebene um $(5,-7)$ mit dem Radius 3. Berechnen Sie für

$$\vec{v}(x,y) = (7y - e^{\sin x}, 15x - \sin(y^3+8y))^T$$

das Integral

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}\,.$$

b) Es sei G das Dreieck in der (x,y)–Ebene mit den Ecken $(0,0), (\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 1)$. Berechnen Sie mit $\vec{v}(x,y) = (y - \sin x, \cos x)^T$

$$\int_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

zunächst direkt und dann mit Hilfe eines Gebietsintegrals.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Donnerstag, dem **09.10.2008**, vor dem Sekretariat (Mathematikgebäude 20.30) aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer **mündlichen** Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, den **21.10.2008**, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude 20.30) statt.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom **27.10.2008** bis **31.10.2008** im Allianzgebäude 05.20.

Die **allgemeine** Klausureinsicht (siehe Aushang) findet am Mittwoch, den **05.11.2008**, von 15.45 bis 17.15 Uhr im Seminarraum S 34 (Mathematikgebäude 20.30) statt.