Aufgabe 1

a) Mit $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist $S(x,y,z) = \tilde{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und

mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist $T(x,y,z) = B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. S und T

sind linear.

Es ist $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = \operatorname{rang}(B) = 3$. Da der Rang die Dimension des Bildes angibt, sind somit S und T <u>surjektiv</u>. Da (3,3)-Matrizen mit vollem Rang regulär sind, haben $S(x,y,z) = \vec{0}$ und $T(x,y,z) = \vec{0}$ nur die Lösung (0,0,0): <u>S, T sind injektiv</u>.

b) Es ist $(T \circ S)(x,y,z) = (B\tilde{A})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit

$$B\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$ nach x, y, z aufzulösen:

$\rightarrow \quad z = u, \quad y = v - u, \quad x = w - (v-u) - u = w - v$

d.h.: $(T \circ S)^{-1}(u,v,w) = \begin{pmatrix} w - v \\ v - u \\ u \end{pmatrix}$

---

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

noch Aufgabe 1

Vermutung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \sum_{k=1}^{n} k \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Induktionsbeweis: Anfang: $n=1, n=2, n=3$ siehe oben ✓

Ind schluss: Ind Vor: Für ein $n \geq 1$ gelte

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \sum_{k=1}^{n} k \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ind Beh: Es gilt $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \sum_{k=1}^{n+1} k \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bew: $A^{n+1} = A^n A \overset{\text{Ind Vor}}{=} \begin{pmatrix} 1 & n & \sum_{k=1}^{n} k \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 1+n+\sum_{k=1}^{n} k \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

II,2 a) $\|(a_j)\| = (\langle (a_j), (a_j)\rangle)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} a_j \bar{a}_j} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2}$

b) $\{(b_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}} : n\in\mathbb{N}\}$ mit $b_j^{(n)} = \begin{cases} 1 & n=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Begründung: $\|(b_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}}\| = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j^{(n)}|^2 = 1$ ✓ (normal)

für $n\neq m$: $\langle (b_j^{(n)}), (b_j^{(m)})\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{b_j^{(n)} \bar{b}_j^{(m)}}_{\substack{=0 \text{ für } j\neq n \\ \text{od. } j\neq m \\ \text{also für alle } j\in\mathbb{N}}} = 0$ (orthogonal)

Basis: für $(a_j)\in V$ ist $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (b_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}}}_{\substack{\text{endl. Summe, da nur} \\ \text{endl. viele } a_n\neq 0 \text{ sind.}}} = (a_j)$

c.) $b_6 = c_1 = 1$, $b_n := 0$, $c_m = 0$ für $n\neq 6$, $m\neq 1$ tun es.

$\|a_j\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{5} |a_j|^2} = \sqrt{1+1+1+1+2008^2}$

$= \sqrt{4.032.068}$

II, 3 a) Setzen wir $r(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$, so erhalten wir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0^+} r^2 \ln r^2 = \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln r^2}{\frac{1}{r^2}}$$

$$\overset{\text{l'hospital}}{=} \lim_{r\to 0^+} \frac{\frac{1}{r^2}}{-\frac{1}{2r^3}} = \lim_{r\to 0^+} -2r = 0 = f(0,0)$$

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist $f_x(x,y) = 2x\ln(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\cdot 2x \cdot \frac{1}{x^2+y^2}$
$= 2x(1+\ln(x^2+y^2))$

f_y analog. Das ergibt:

$$Df(x,y) = (2+2\ln(x^2+y^2))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h}\ln(h^2) = \lim_{h\to 0} 2h\ln h = 0$$

f_y analog. Damit $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Stetigkeit von Df: Sei (x_n, y_n) eine Folge in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ mit $(x_n, y_n) \to (0,0)$ und dazu $r_n := \sqrt{x_n^2+y_n^2}$, $\varphi_n \in [0, 2\pi)$:
$x_n = r_n \sin\varphi_n$, $y_n = r_n \cos\varphi_n$.

Für die erste Komponente von Df gilt:

$$\lim_{n\to\infty} |2x_n(1+\ln(x_n^2+y_n^2))| = \lim_{n\to\infty} |2r_n \sin\varphi_n(1+\ln r^2)|$$

$$\leq 2\lim_{n\to\infty} (\underbrace{r_n}_{\to 0} + 2\underbrace{r_n|\ln r_n|}_{\to 0}) = 0.$$

Analog für die zweite Komponente. Also $Df(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Df(0,0)$.
Folglich ist Df stetig

c) f ist stetig partiell diff'bar
$\to f$ ist stetig diff'bar, insbesondere diff'bar.

d) f diff'bar $\to D_{\vec{v}} f(\sqrt{e},0) = \vec{v}\cdot Df(\sqrt{e},0)$

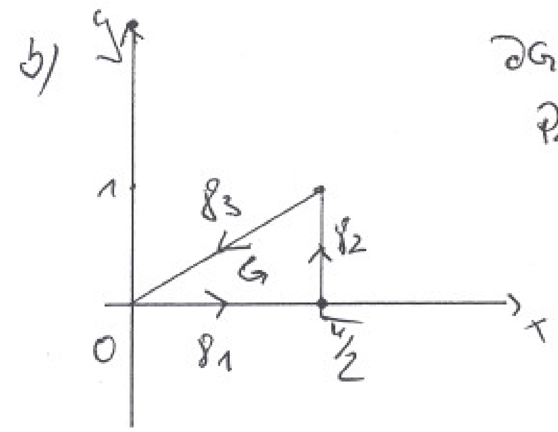
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{e}(1+\ln(e+0)) \\ 0 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2e}(1+1) = 4\sqrt{2e}$$

Aufgabe 4

a) Es ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit $v_1(x,y) = 7y - e^{\sin x}$,
$v_2(x,y) = 15x - \sin(y^3+8y)$

Wegen $D_2 v_1(x,y) = 7$ und $D_1 v_2(x,y) = 15$ liefert der ebene Gaußsche Integralsatz:

$$\underline{\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}} = \iint_{(x-5)^2+(y+7)^2 \le 9} (D_1 v_2 - D_2 v_1)(x,y)\,d(x,y) = \underline{8\pi\cdot 9}$$

b) 

$\partial G = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$

Parametrisieren von γ_j : $\vec{r}_j(t) = \begin{pmatrix} x_j(t) \\ y_j(t) \end{pmatrix}$

γ_1: $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ $(= t_e)$

γ_2: $\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$ $(= t_e)$

γ_3: $\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} - t \\ 1 - \frac{2}{\pi}t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ $(= t_e)$

$\underline{1.}$ Direkt berechnen: $\displaystyle\oint_{\partial G} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \Big(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3}\Big)\vec{v}\cdot d\vec{s}$

Mit $\displaystyle\int_{\gamma_j} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_{t=0}^{t_e} \begin{pmatrix} y_j(t) - \sin x_j(t) \\ \cos x_j(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_j(t) \\ \dot{y}_j(t) \end{pmatrix} dt$ erhält man:

$$\oint_{\partial G} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t)\,dt + 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\Big(-1 + \frac{2}{\pi}t\Big) + \sin\Big(\frac{\pi}{2} - t\Big) + \cos\Big(\frac{\pi}{2} - t\Big)\Big(-\frac{2}{\pi}\Big)\Big)\,dt$$

$$= -1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{2}{\pi} = \underline{-\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}}$$

noch Aufgabe 4

2. Mit dem Gaußschen Integralsatz (siehe a)):

$$\int_{\partial G} \begin{pmatrix} y-\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \iint_G (-\sin x - 1)\, d(x,y)$$

$$= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{y=0}^{\frac{2}{\pi}x} (-\sin x - 1)\, dy \right) dx = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$$

$$\left(\stackrel{\text{oder}}{=} \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=\frac{\pi}{2}y}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x - 1)\, dx \right) dy \right)$$

✓