UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2009
21.09.2009

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Für das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)\big((2-\lambda)(1-\lambda) - (\lambda-1)\big) - \big((1-\lambda) - (\lambda-1)\big) \\
&= (1-\lambda)\Big((2-\lambda)\big((2-\lambda)+1\big) - \big(1+1\big)\Big) \\
&= (1-\lambda)\Big(\lambda^2 - 5\lambda + 4\Big) \\
&= -(\lambda-1)^2(\lambda-4).
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A, also $1, 4$. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$\begin{aligned}
E_A(1) &= \operatorname{Kern}(A - I_3) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}, \\
E_A(4) &= \operatorname{Kern}(A - 4I_3) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}.
\end{aligned}$$

b) Da $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar. Aus dem gleichen Grund gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Um ein solches S zu bestimmen, muss man eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A angeben.

Setze

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_A(4) \qquad \text{sowie} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_A(1).$$

Da $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist, stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander, also gilt $v_1 \perp v_2$. Ist

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

definiert, so sind $v_3 \perp v_1$ und $v_3 \perp v_2$. Wegen $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ folgt, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind und somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Aufgrund von $v_1 \in E_A(4)$, $\dim E_A(4) = 1$ und $\dim E_A(1) = 2$ ergibt sich $E_A(1) = \operatorname{lin}\{v_2, v_3\}$.

Folglich ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A gegeben durch

$$\{\frac{1}{\|v_1\|}v_1, \frac{1}{\|v_2\|}v_2, \frac{1}{\|v_3\|}v_3\} = \{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\}.$$

Deshalb ist die Matrix

$$S := \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

orthogonal und es gilt

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad S^{-1}AS = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Zweimalige Anwendung der Kettenregel zeigt: $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Der Gradient von f lautet

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix}3x^2 - 6x + y^2\\ 2xy - 2y\end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die zweite Komponente von $\operatorname{grad} f(x,y)$ verschwindet genau dann, wenn $y(x-1) = 0$ gilt, also wenn $y = 0$ oder $x = 1$ ist.

Im Fall $y = 0$ ergibt sich für die erste Komponente $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Genau für $x = 0$ oder $x = 2$ ist diese $= 0$.

Im Fall $x = 1$ ergibt sich für die erste Komponente $3 - 6 + y^2 = -3 + y^2$. Genau für $y = \sqrt{3}$ oder $y = -\sqrt{3}$ ist diese $= 0$.

Damit sind $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,\sqrt{3})$, $(1,-\sqrt{3})$ alle kritischen Punkte von f.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix}6x-6 & 2y\\ 2y & 2x-2\end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $-6, -2$ und ist somit negativ definit. Daher besitzt f in $(0,0)$ ein lokales Maximum mit $f(0,0) = 0$.

$H_f(2,0) = \begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $6, 2$ und ist somit positiv definit. Daher besitzt f in $(2,0)$ ein lokales Minimum mit $f(2,0) = -4$.

$H_f(1,\sqrt{3}) = \begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$ ist indefinit, weil $\det H_f(1,\sqrt{3}) = -12 < 0$ gilt. Daher liegt in $(1,\sqrt{3})$ ein Sattelpunkt von f vor.

$H_f(1,-\sqrt{3}) = \begin{pmatrix}0 & -2\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$ ist indefinit, weil $\det H_f(1,-\sqrt{3}) = -12 < 0$ gilt. Daher liegt in $(1,-\sqrt{3})$ ein Sattelpunkt von f vor.

b) Nach der Kettenregel ist g auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, insbesondere auch stetig. Da S abgeschlossen und beschränkt ist, nimmt g auf S Maximum und Minimum an. Zu deren Bestimmung verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange: Ist

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(x,y) = x^2 + y^2 - 8,$$

definiert, dann gilt $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$ sowie

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{rg} h'(x,y) < 1$ ist äquivalent zu $x = y = 0$, was jedoch für $(x,y) \in S$ nicht vorkommt. Also gilt $\operatorname{rg} h'(x,y) = 1$ für alle $(x,y) \in S$.

Wir betrachten die Lagrangefunktion

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ L(x,y,\lambda) = g(x,y) + \lambda h(x,y) = xy - 2(x^2+y^2) + \lambda(x^2+y^2-8).$$

Es gilt

$$\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} y - 4x + 2\lambda x \\ x - 4y + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 8 \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$ ist äquivalent zu:

$$y - 4x + 2\lambda x = 0 \qquad (1)$$
$$x - 4y + 2\lambda y = 0 \qquad (2)$$
$$x^2 + y^2 - 8 = 0 \qquad (3)$$

Addition von (1) und (2) ergibt

$$(x+y) - 4(x+y) + 2\lambda(x+y) = 0,$$

was genau für $x + y = 0$ oder $-3 + 2\lambda = 0$ erfüllt ist.

1. Fall: $x = -y$. Aus Gleichung (3) folgt dann $x^2 = 4$, also $x = 2$ oder $x = -2$. Damit sind $(2,-2)$ und $(-2,2)$ Kandidaten für Extremstellen.

2. Fall: $\lambda = 3/2$. Setzt man dies in Gleichung (1) ein, so erhält man

$$y - 4x + 3x = 0, \qquad \text{also} \quad x = y.$$

Hiermit ergibt sich aus Gleichung (3): $x^2 = 4$, also $x = 2$ oder $x = -2$, so dass $(2,2)$ und $(-2,-2)$ weitere Kandidaten für Extremstellen sind.

Ein Vergleich der Funktionswerte

$$g(2,2) = g(-2,-2) = -12, \qquad g(-2,2) = g(2,-2) = -20$$

zeigt

$$\min_{(x,y)\in S} g(x,y) = -20 \qquad \text{sowie} \qquad \max_{(x,y)\in S} g(x,y) = -12.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Mit $\vec{v}(x,y,z) =: \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ gelten

$$\partial_1 v_2(x,y,z) = 2xe^{x^2+z^2}\cos(y) = \partial_2 v_1(x,y,z),$$
$$\partial_1 v_3(x,y,z) = 4xze^{x^2+z^2}\sin(y) + \frac{e^x}{1+z^2} = \partial_3 v_1(x,y,z),$$
$$\partial_2 v_3(x,y,z) = 2ze^{x^2+z^2}\cos(y) = \partial_3 v_2(x,y,z).$$

Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^3$.

Wir berechnen ein zugehöriges Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Wegen $\partial_x f(x,y,z) = 2xe^{x^2+z^2}\sin(y) + e^x \arctan(z)$ gilt $f(x,y,z) = e^{x^2+z^2}\sin(y) + e^x \arctan(z) + h(y,z)$ für eine differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Aus $\partial_y f(x,y,z) = v_2(x,y,z)$ und $\partial_y f(x,y,z) = e^{x^2+z^2}\cos(y) + \partial_y h(y,z)$ folgt $\partial_y h(y,z) = 2$, also $h(y,z) = 2y + g(z)$ für ein geeignetes $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Damit ist $f(x,y,z) = e^{x^2+z^2}\sin(y) + e^x\arctan(z) + 2y + g(z)$. Die Gleichungen $\partial_z f(x,y,z) = v_3(x,y,z)$ und $\partial_z f(x,y,z) = 2ze^{x^2+z^2}\sin(y) + \frac{e^z}{1+z^2} + g'(z)$ führen auf $g'(z) = 0$; dies ist beispielsweise für $g \equiv 0$ erfüllt. Somit gilt $\nabla f = \vec{v}$ für $f(x,y,z) = e^{x^2+z^2}\sin(y) + e^x\arctan(z) + 2y$. Deshalb ergibt sich

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = f(\gamma(1/2)) - f(\gamma(0)) = f(0,\pi/2,1) - f(0,0,0) = e + \arctan(1) + \pi = e + \tfrac{5\pi}{4}.$$

b) Offenbar ist $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$. Der Divergenzsatz liefert

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iiint_Z (\nabla\cdot\vec{v})\,d(x,y,z).$$

Es gilt $(\nabla\cdot\vec{v})(x,y,z) = y^2 + x^2$. Mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ (wobei $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $z \in [-1,2]$) erhält man

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iiint_Z (x^2+y^2)\,d(x,y,z) = \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[-1,2]} \big((r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2\big)\,r\,d(r,\varphi,z)$$

$$= \int_0^1\int_{-1}^2\int_0^{2\pi} r^3\,d\varphi\,dz\,dr = 2\pi\int_0^1\int_{-1}^2 r^3\,dz\,dr = 6\pi\int_0^1 r^3\,dr = \tfrac{3}{2}\pi.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung $y'' + 2y' - 3y = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda-1)(\lambda+3)$$

besitzt die jeweils einfachen Nullstellen 1 und -3. Somit ist

$$\phi_1(t) = e^t, \qquad \phi_2(t) = e^{-3t}$$

ein zugehöriges Fundamentalsystem und für die allgemeine Lösung y_H der homogenen Gleichung ergibt sich $y_H = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung $5e^{2t}$ lautet und 2 keine Nullstelle von p ist, kann man eine spezielle Lösung y_P der inhomogenen Gleichung $y'' + 2y' - 3y = 5e^{2t}$ mit dem Ansatz $y_P(t) = Ce^{2t}$, $C \in \mathbb{R}$, erhalten. Dieser führt wegen

$$y_P'(t) = 2Ce^{2t}, \qquad y_P''(t) = 4Ce^{2t}$$

auf

$$y_P''(t) + 2y_P'(t) - 3y_P(t) = 5Ce^{2t}.$$

Damit dies $= 5e^{2t}$ ist, muss $C = 1$ gelten, d.h. $y_P(t) = e^{2t}$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2y' - 3y = 5e^{2t}$ lautet deshalb

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1e^t + c_2e^{-3t} + e^{2t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

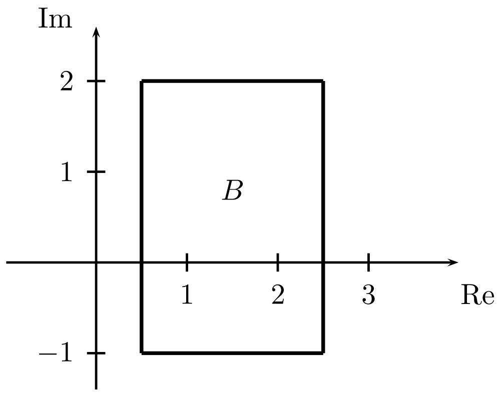
Insbesondere ergibt sich

$$y(0) = c_1 + c_2 + 1 \qquad \text{sowie} \qquad y'(0) = c_1 - 3c_2 + 2.$$

Es soll $y(0) = 0$ und $y'(0) = 3$ gelten, das bedeutet $c_1 + c_2 + 1 = 0$ und $c_1 - 3c_2 + 2 = 3$. Löst man etwa die erste Gleichung nach c_2 auf und setzt dies in die zweite ein, so erhält man $c_1 = -1/2$ und $c_2 = -1/2$. Das Anfangswertproblem hat also die Lösung

$$y(t) = -\frac{1}{2}(e^t + e^{-3t}) + e^{2t}.$$

b) Skizze von $B = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant 5/2,\ -1 \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant 2\}$:



i) Der Integrand $F(z) := \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{z(z+1)}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$ holomorph. Die Polstellen 0 und -1 von F liegen außerhalb der von γ umschlossenen Menge, so dass F auf einer offenen und einfach zusammenhängenden Umgebung von B, z.B. auf $\{z \in \mathbb{C} : 1/4 < \operatorname{Re}(z) < 3, -2 < \operatorname{Im}(z) < 3\}$, holomorph ist. Da γ einfach geschlossen und positiv orientiert ist, liefert der Cauchysche Integralsatz

$$\int_\gamma F(z)\, dz = 0.$$

ii) Der Integrand $F(z) := \frac{e^{2z}}{(z-1)(z-2)}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$ holomorph. Die isolierten Singularitäten 1 und 2 liegen innerhalb von B. Deshalb führt der Residuensatz auf

$$\int_\gamma F(z)\, dz = 2\pi i\big(\operatorname{res}(F; 1) + \operatorname{res}(F; 2)\big).$$

Da 1 eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms von F ist und der Zähler von F in 1 nicht verschwindet, hat F in 1 eine Polstelle erster Ordnung. Somit gilt

$$\operatorname{res}(F; 1) = (z-1)F(z)\Big|_{z=1} = \frac{e^{2z}}{z-2}\Big|_{z=1} = -e^2.$$

Da F auch in 2 eine Polstelle erster Ordnung besitzt, ergibt sich

$$\operatorname{res}(F; 2) = (z-2)F(z)\Big|_{z=2} = \frac{e^{2z}}{z-1}\Big|_{z=2} = e^4.$$

Also ist

$$\int_\gamma F(z)\, dz = 2\pi i(e^4 - e^2).$$