Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2010
20.09.2010

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Gegeben seien

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+1 & 3\alpha & 2\alpha \\ 1 & \alpha & 0 & 2\alpha \\ -1 & 1 & 3\alpha+3 & -2\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie in Abhängigkeit von α

i) den Rang von A_α;

ii) die Menge aller $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ mit $A_\alpha \vec{x} = \vec{b}$.

b) Untersuchen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

auf Diagonalisierbarkeit.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto (x^4 + y^2)\, e^{-x^2}$$

und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

b) Begründen Sie, dass die Gleichung

$$xz - y + z^3 = -2$$

in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $z = g(x,y)$ die Ableitung $g'(1,0)$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Es sei $G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + x^2 + y^2 \leqslant z^2 \leqslant 4,\ z \geqslant 0\big\}$. Berechnen Sie

$$\iiint\limits_G z\, d(x,y,z)\,.$$

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche

$$\mathcal{F} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = 3(x^2+y^2),\ 3 \leqslant z \leqslant 6\big\}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie den Wert von

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{\sin\zeta}{\zeta^{96}}\, d\zeta\,.$$

b) Die Funktionen $f\colon \mathbb{C}\setminus\{-1\} \to \mathbb{C}$ und $g\colon \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}$ seien definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^3} \qquad (z \neq -1),$$

$$g(z) = \left(e^{\frac{1}{1-z}}\right)^2 \qquad (z \neq 1).$$

Berechnen Sie $\operatorname{Res}(f;-1)$ und $\operatorname{Res}(g;1)$.

c) Sei $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Bestimmen Sie eine Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\mathscr{L}(y)(s) = \frac{1}{(s+a)s^2} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > \max\{0, -\operatorname{Re}(a)\}.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 13.10.2010, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 20.10.2010, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Daimler-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 25.10.2010 bis 29.10.2010 im Allianz-Gebäude 05.20.