

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

- a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die zum linearen Gleichungssystem $A_\alpha \vec{x} = \vec{b}$ gehörende erweiterte Matrix (A, \vec{b}) und bringen diese durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform. (Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2, Z_3 bezeichnet)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha+1 & 3\alpha & 2\alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 0 & 2\alpha & 1 \\ -1 & 1 & 3\alpha+3 & -2\alpha & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} Z_2 \rightarrow Z_2 - Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_1 \end{array}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha+1 & 3\alpha & 2\alpha & 1 \\ 0 & -1 & -3\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+2 & 6\alpha+3 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\begin{array}{l} Z_1 \rightarrow Z_1 + (\alpha+1)Z_2 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 + (\alpha+2)Z_2 \end{array}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3\alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & -1 & -3\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3(1-\alpha^2) & 0 & 3 \end{array} \right).$$

An dieser Stelle ist klar, dass A_α im Fall $\alpha \in \{-1, 1\}$ den Rang 2 und im Fall $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ den Rang 3 hat. Außerdem liest man $\text{rang}(A_\alpha, \vec{b}) = 3$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ab. Deshalb ist das lineare Gleichungssystem $A_\alpha \vec{x} = \vec{b}$ im Fall $\alpha \in \{-1, 1\}$ unlösbar. Für alle anderen α lässt sich obiges Verfahren fortsetzen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3\alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & -1 & -3\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3(1-\alpha^2) & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} Z_2 \rightarrow -Z_2 \\ Z_3 \rightarrow \frac{1}{3(1-\alpha^2)} Z_3 \end{array}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3\alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 3\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-\alpha^2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\begin{array}{l} Z_2 \rightarrow Z_2 - 3\alpha Z_3 \\ Z_1 \rightarrow Z_1 + 3\alpha^2 Z_3 \end{array}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2\alpha & 1 + \frac{3\alpha^2}{1-\alpha^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-3\alpha}{1-\alpha^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-\alpha^2} \end{array} \right).$$

Somit erhält man im Fall $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ als Lösungsmenge

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A_\alpha \vec{x} = \vec{b}\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\alpha^2} \begin{pmatrix} 1+2\alpha^2 \\ -3\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- b) Für das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & -10 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(2+\lambda) \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2+\lambda)((5-\lambda)(3-\lambda) - 3) = -(2+\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-6). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A , also $-2, 2, 6$. Da A drei verschiedene Eigenwerte besitzt und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, gibt es drei linear unabhängige Eigenvektoren von A . Deshalb ist die 3×3 -Matrix A diagonalisierbar.

Aufgabe 2

- a) Zweimalige Anwendung der Kettenregel zeigt: $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Der Gradient von f lautet

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 e^{-x^2} - 2x(x^4 + y^2)e^{-x^2} \\ 2ye^{-x^2} \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die zweite Komponente von $\text{grad } f(x, y)$ verschwindet genau dann, wenn $y = 0$ gilt. Im Fall $y = 0$ lautet die erste Komponente von $\text{grad } f(x, y)$: $(4x^3 - 2x^5)e^{-x^2} = 2x^3(2 - x^2)e^{-x^2}$. Diese ist $= 0$ genau für $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$.

Damit sind $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$ alle kritischen Punkte von f .

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} (12x^2 - 10x^4 - 2y^2)e^{-x^2} - 2xD_1 f(x, y) & -4xye^{-x^2} \\ -4xye^{-x^2} & 2e^{-x^2} \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$H_f(\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} -16e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $-16e^{-2} < 0, 2e^{-2} > 0$ und ist somit indefinit. Daher liegt in $(\sqrt{2}, 0)$ ein Sattelpunkt von f vor.

$H_f(-\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} -16e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $-16e^{-2} < 0, 2e^{-2} > 0$ und ist somit indefinit. Daher liegt in $(-\sqrt{2}, 0)$ ein Sattelpunkt von f vor.

Da $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte $0, 2$ hat, ist das Kriterium aus der Vorlesung nicht anwendbar. Es gilt jedoch $f(0, 0) = 0$ und $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Folglich liegt im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum von f vor.

- b) Definiere die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto xz - y + z^3 + 2$. Dann ist f auf \mathbb{R}^3 stetig differenzierbar mit

$$f'(x, y, z) = (z \quad -1 \quad x + 3z^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Es gilt $f(1, 0, -1) = -1 - 1 + 2 = 0$ und

$$\partial_z f(x, y, z) = x + 3z^2, \quad \text{also} \quad \partial_z f(1, 0, -1) = 4 \neq 0.$$

Somit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen erfüllt. Danach gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(1, 0)$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(1, 0) = -1$ und $f(x, y, h(x, y)) = 0$ für alle $(x, y) \in U$. Dies entspricht gerade der behaupteten Auflösbarkeit der Gleichung nach z im Punkt $(1, 0, -1)$. Außerdem liefert der Satz über implizit definierte Funktionen für die Ableitung von g in $(1, 0)$

$$g'(1, 0) = -\frac{1}{\partial_z f(x, y, g(x, y))} \partial_{(x, y)} f(x, y, g(x, y)) \Big|_{(x, y) = (1, 0)} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

a) Mit Zylinderkoordinaten lässt sich G schreiben als

$$G = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \mid \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, \sqrt{3}], z \in [\sqrt{1+r^2}, 2]\}.$$

Die Transformationsformel liefert nun

$$\begin{aligned} \iiint_G z d(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{1+r^2}}^2 z r dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=\sqrt{1+r^2}}^{z=2} dr d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r(3-r^2) dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{3}} d\varphi \\ &= \frac{9}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{3(x^2 + y^2)} \end{pmatrix} \mid \sqrt{3} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\sqrt{3}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

und nach Einführung von Polarkoordinaten $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ erhält man

$$\mathcal{F} = \{\vec{g}(u, v) \mid (u, v) \in U\}$$

mit

$$\vec{g}(u, v) := \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ \sqrt{3} u \end{pmatrix}, \quad U := [\sqrt{3}, 2\sqrt{3}] \times [0, 2\pi].$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt von \mathcal{F}

$$\begin{aligned} I(\mathcal{F}) &= \iint_{\mathcal{F}} do = \iint_U \|D_1 \vec{r}(u, v) \times D_2 \vec{r}(u, v)\| d(u, v) \\ &= \iint_U \left\| \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \right\| d(u, v) = \iint_U \left\| \begin{pmatrix} -\sqrt{3} u \cos v \\ -\sqrt{3} u \sin v \\ u \end{pmatrix} \right\| d(u, v) \\ &= \iint_U \sqrt{3u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2} d(u, v) = \iint_U 2u d(u, v) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} 2u du dv = \int_0^{2\pi} [u^2]_{u=\sqrt{3}}^{u=2\sqrt{3}} dv = 9 \int_0^{2\pi} dv = 18\pi. \end{aligned}$$

H17II Physik Lösungen

A44a) Aus der Laurentreihe von $\frac{\sin z}{z^{96}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1-96}$

für $0 < |z|$ liest man ab: $\text{Res}\left(\frac{\sin z}{z^{96}}, 0\right) = (-1)^{47} \frac{1}{95!}$

Der Residuensatz ergibt $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^{96}} dz = -2\pi i \frac{1}{95!}$

A45a) Res(f; -1) = 0, da f(z) die Laurentreihe von e^{-1} für $0 < |z+1|$ ist.

Aus $g(z) = e^{\frac{z}{1-z}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k (z-1)^{-k}$ liest man ab

Res(g; 1) = -2

A4c) Partialbruchzerlegung für $Y(s) = \frac{1}{(s+a)s^2} = \frac{A_1}{s+a} + \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2}$

\Rightarrow (*) $1 = A_1 s^2 + B_1 s(s+a) + B_2(s+a)$

Setze in (*) $s = -a \Rightarrow A_1 = \frac{1}{a^2}$

$s = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{a}$

Differenziere (*) nach s und setze $s=0 \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{a^2}$

Also $Y(s) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{s+a} - \frac{1}{a^2} \frac{1}{s} + \frac{1}{a} \frac{1}{s^2}$

Mit $\frac{1}{s+a} \rightarrow e^{-at} \mathcal{L}^{-1}$, $\frac{1}{s} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}$, $\frac{1}{s^2} \rightarrow t \mathcal{L}^{-1}$

folgt $y(t) = \left(\frac{1}{a^2} e^{-at} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} t \right) \mathcal{L}^{-1}$