Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2011
19.09.2011

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (1 + 3 + 3 + 3 = 10 Punkte)

Die linearen Abbildungen $S, T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind wie folgt gegeben:

$$S(\vec{e}_1) = \vec{e}_3\,, \quad S(\vec{e}_2) = \vec{e}_2\,, \quad S(\vec{e}_3) = \vec{e}_1$$

und

$$T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\,, \quad T(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3\,, \quad T(\vec{e}_3) = \vec{e}_3\,.$$

Hierbei ist $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

a) Berechnen Sie $(S \circ T)(\vec{x})$ für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

b) Untersuchen Sie, ob $S \circ T$ injektiv ist. Wenn ja, berechnen Sie $(S \circ T)^{-1}(\vec{u})$ für jedes $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$.

c) Berechnen Sie $(T - \mathrm{id})^n(\vec{x})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von S und zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraumes.

Hinweis zu c): Ist $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, so bedeutet $A^n = \underbrace{A \circ \ldots \circ A}_{n-mal}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Menge

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 2,\ x^2 + y^2 \geqslant 1\right\}$$

und berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten

$$\iint\limits_G \frac{x + y}{x^2 + y^2}\, d(x, y)\,.$$

b) Gegeben seien die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto \int_{x\sin(y)}^{x^3+y^2} e^{(t^2)}\, dt$$

sowie der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $(D_{\vec{v}} f)(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (4 + 6 = 10 Punkte)

a) Die Fläche $\mathcal{F}$ ist in Parameterdarstellung durch

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u-v \\ u+v \\ uv \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte von $\mathcal{F}$, in denen die Tangentialebene an $\mathcal{F}$ zur Ebene $2x + y - 2z + 3 = 0$ parallel ist.

b) Es sei $a > 0$ und $G \subset \mathbb{R}^3$ das beschränkte Gebiet, das von den Flächen

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 0\right\} \quad \text{und} \quad \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geqslant 0\right\}$$

berandet wird. Ferner sei

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie

$$\iint\limits_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{o}\,.$$

Hinweis: Es empfiehlt sich, zunächst einen Integralsatz anzuwenden.

Aufgabe 4 (3 + 1 + 6 = 10 Punkte)

a) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} \sin(e^{it})\, dt\,.$$

b) Bestimmen Sie das Residuum von $f(z) := \dfrac{1}{z^{17}} \dfrac{1}{1-z^2}$ in 0.

c) Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \cos(t) & \text{für } t \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \sin(t) & \text{für } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Berechnen Sie $f * g$ mit Hilfe der Laplacetransformation und des Faltungssatzes.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 12.10.2011, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Donnerstag, den 20.10.2011, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 24.10.2011 bis 28.10.2011 im Allianz-Gebäude 05.20.