ETechnik

H2011 HM II Physik Lösungen

A1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} x_j \vec{e}_j$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} u_j \vec{e}_j$

S, T linear gibt $S(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $T(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1+x_2 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix}$. (1)

a) $(S\circ T)(\vec{x}) \overset{(1)}{=} S(x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3) \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

b) $S\circ T$ ist linear: $S\circ T$ ist injektiv, falls aus $S\circ T(\vec{x}) = \vec{0}$ folgt: $\vec{x} = \vec{0}$. Also sei $(S\circ T)(\vec{x}) \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man sieht unmittelbar: $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$: $\vec{x} = \vec{0}$ ✓

$S\circ T$ ist injektiv

$\vec{x} = (S\circ T)^{-1}(\vec{u}) \Longleftrightarrow (S\circ T)(\vec{x}) \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (S\circ T)^{-1}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 - u_3 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix}$$

c) $(T - id)(\vec{x}) \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ x_1+x_2-x_2 \\ x_1+x_2+x_3-x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}$

$(T-id)^2(\vec{x}) = (T-id)(0, x_1, x_1+x_2) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ x_1 - x_1 \\ 2x_1+x_2-x_1-x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$

$(T-id)^3(\vec{x}) = (T-id)(0,0,x_1) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ x_1 - x_1 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\Rightarrow (T-id)^n(\vec{x}) = \vec{0}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

A1 a)

$$S\vec{x} = \lambda\vec{x} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \overset{!}{=} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

$\lambda = 1$ ist doppelter EW, $\lambda = -1$ ist einfacher EW

EV zu $\lambda = 1$: $x_1 = x_3 \Rightarrow$ Basis des zugehörigen Eigenraums

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda = -1$: $x_2 = 0,\ x_1 = -x_3 \Rightarrow$ Basis des zugehörigen Eigenraums

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

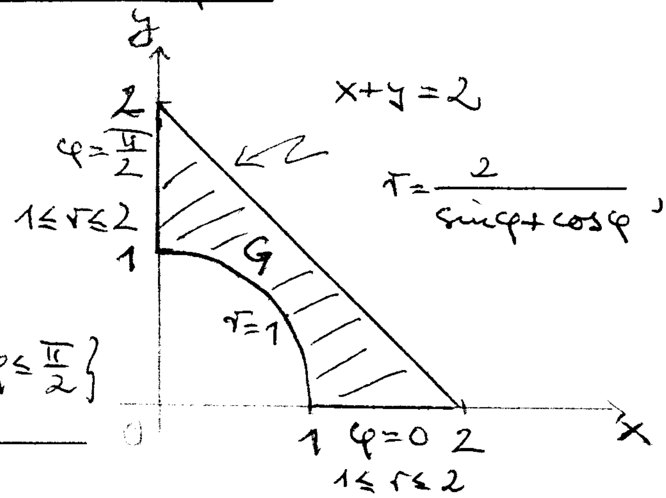
H 2011 HöM II Physik Lösungen

A2a)

Mit $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

ist

$$G=\left\{(r,\varphi)\ \middle|\ 1\le r\le \frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$$



$$r=\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

Also:

$$\underline{\iint_G \frac{x+y}{x^2+y^2}\,d(x,y)} = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=1}^{\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi}} \frac{1}{r}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi = \underline{\pi-2}$$

A2b) f ist als Integral über eine stetige Funktion mit stetig diff'baren Grenzen stetig diff'bar (Kettenregel, Fundamentalsatz)

Es gilt $\underline{(D_{\vec{v}}f)(x,y)} = f'(x,y)(\vec{v}) = \underline{\nabla f(x,y)\cdot\vec{v}}$

$$(D_1 f)(x,y) = 3x^2 e^{(x^3+y^2)^2} - \sin y\, e^{x^2\sin^2 y}$$

$$(D_2 f)(x,y) = 2y\, e^{(x^3+y^2)^2} - x\cos y\, e^{x^2\sin^2 y}$$

$$\Rightarrow \underline{(D_{\vec{v}}f)(x,y)\big|_{\vec{v}=\binom{1}{1}} = (3x^2+2y)e^{(x^3+y^2)^2} - (\sin y + x\cos y)e^{x^2\sin^2 y}}$$

H 2011 HM II ETechnik Physik Lösungen

A 3 a) gesucht sind die Punkte $\vec{r}(u_0, v_0)$ ($\in F$), in denen der Normalenvektor parallel zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (dem Normalenvektor der Ebene) ist:

$$\partial_1 \vec{r}(u_0, v_0) \times \partial_2 \vec{r}(u_0, v_0) = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_0 - v_0 \\ -u_0 - v_0 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ u_0 - v_0 = -2 \\ u_0 + v_0 = +1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u_0 = -\frac{1}{2} \\ v_0 = \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\underline{\vec{r}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ -3/4 \end{pmatrix}}$$

A 3 b)

$$\iint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \iiint_G \nabla \cdot \vec{v} \, d\tau \qquad \text{(Gauß Integralsatz)}$$

$$= 5 \iint_{x^2+y^2 \le a^2} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} z \, dz \, d(x,y)$$

Polarkoordinaten in (x,y)-Ebene

$$= 5 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-r^2}} z \, dz \, r \, dr \, d\varphi$$

$$= \frac{5}{2} 2\pi \int_{r=0}^{a} (a^2 - r^2) r \, dr = 5\pi \left(\frac{1}{2} a^4 - \frac{1}{4} a^4 \right) = \underline{\underline{\frac{5\pi}{4} a^4}}$$

HM I H2011 Physik Lösungen

A4a) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} \sin(e^{it})\,dt = \left(z = e^{it},\ dz = iz\,dt \right)$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{1}{i}\,\frac{\sin(z)}{z^2}\,dz = \frac{1}{i}\,2\pi i\ \mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{z^2};0\right) = \underline{2\pi}$$

A4b) $f(z) = \frac{1}{z^{17}}\,\frac{1}{1-z^2} \overset{|z|<1}{=} \frac{1}{z^{17}}\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} = \cdots + \frac{z^{16}}{z^{17}} + \cdots$

$$\underline{\mathrm{Res}(f(z);0) = 1}$$

A4c) Mit den Bezeichnungen $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s),\ g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(s)$, mit $F(s) = \frac{s}{1+s^2}$, $G(s) = \frac{1}{1+s^2}$, mit dem Faltungssatz und der Regel über Ableitung der Bildfunktion erhält man:

$$\mathcal{L}(f*g)(s) = F(s)\,G(s)$$

$$= \frac{s}{(1+s^2)^2} = -\frac{1}{2}\,G'(s) \bullet\!\!-\!\!\circ -\frac{1}{2}(-t\,g(t))$$

also: $\underline{(f*g)(t) = \frac{1}{2}\,t\sin t}$, $t \geq 0$