Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2012
17.09.2012

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösung zu Aufgabe 1

a) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda) = \det(A-\lambda I)$. Es gilt:

$$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 9\right]$$
$$= (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda - 8\right] = (2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-4).$$

A besitzt somit die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 4$ (jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1).

Für die Eigenräume gilt: $E_A(\lambda_i) = \mathrm{Kern}(A - \lambda_i I),\ i = 1,2,3$, also

$$E_A(-2) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$E_A(2) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$E_A(4) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

b) Da A eine symmetrische Matrix ist, ist A auch diagonalisierbar. Um eine orthogonale Matrix P mit der gewünschten Eigenschaft zu bestimmen, müssen wir nur noch die drei Eigenvektoren auf Länge eins normieren und in eine Matrix schreiben. Für die orthogonale Matrix

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P^TAP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =: D.$$

b) Aus der Gleichung $P^TAP = D$ in **b)** folgt sofort $A = PDP^T$ und für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$A^k = (PDP^T)^k = PD\underbrace{P^TP}_{=I}DP^T \cdots PD\underbrace{P^TP}_{=I}DP^T = PD^kP^T.$$

Da D eine Diagonalmatrix ist, können wir D^k sofort angeben, es gilt:

$$D^k = \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix},$$

und multiplizieren mit P (von links) sowie P^T (von rechts) ergibt

$$A^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^k + (-2)^k & 0 & 4^k - (-2)^k \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 4^k - (-2)^k & 0 & 4^k + (-2)^k \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Da $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ muss für ein lokales Extremum notwendigerweise $\nabla f(x,y) = (0,0)^T$ gelten, also

$$6xy - 6x = 0 \qquad \text{und} \qquad 3x^2 + 12y^2 - 24y = 0.$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $x(y-1) = 0$ und somit erfüllt, falls $x = 0$ oder $y = 1$ gilt.

<u>1. Fall:</u> $x = 0$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $y^2 - 2y = 0$, was für $y = 0$ oder $y = 2$ erfüllt ist.
<u>2. Fall:</u> $y = 1$. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, erhalten wir $3x^2 - 12 = 0$ bzw. $x^2 - 4 = 0$, d.h. $x = 2$ oder $x = -2$.

Die Funktion besitzt also die 4 kritischen Punkte $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,1)$ und $(-2,1)$. Um zu entscheiden, ob in den kritischen Punkten lokale Extrema vorliegen, berechnen wir die Hessematrix der Funktion f. Es gilt:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 24y-24 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der kritischen Punkte liefert

$$\begin{aligned} H_f(0,0) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix} \text{ ist negativ definit} \\ H_f(0,2) &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit} \\ H_f(2,1) &= \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist indefinit} \\ H_f(-2,1) &= \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist indefinit.} \end{aligned}$$

Die Funktion f besitzt also in $(0,0)$ ein lokales Maximum und in $(0,2)$ ein lokales Minimum. Die kritischen Punkte $(2,1)$ und $(-2,1)$ sind Sattelpunkte.

b) Nach Voraussetzung lässt sich f darstellen durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi(f_2(x,y)) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel berechnet sich die Ableitung von f zu

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi'(f_2(x,y))\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \varphi'(f_2(x,y))\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

und für die Determinante ergibt sich

$$\det f'(x,y) = \varphi'(f_2(x,y))\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) - \varphi'(f_2(x,y))\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Wir bezeichnen mit $v_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $v_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von $\vec{v}$, d.h.

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xg(y) + y \\ 2(x^2+1)g(y) + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Damit $\vec{v}$ ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ ist, muss die Verträglichkeitsbedingung erfüllt sein, es muss also gelten

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y) \qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Wegen

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y) = 2xg'(y) + 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y) = 4xg(y) + 1$$

ist dies äquivalent zu

$$g'(y) = 2g(y) \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Lösen dieser Differentialgleichung und verwenden der Anfangsbedingung $g(0) = 1$ ergibt $g(y) = e^{2y}$.

Für dieses g sei nun $\varphi(x,y)$ ein Potential, d.h. $\varphi_x(x,y) = v_1(x,y)$ und $\varphi_y(x,y) = v_2(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Integrieren der ersten Gleichung nach x ergibt

$$\varphi(x,y) = x^2 e^{2y} + xy + \tilde{\varphi}(y),$$

wobei $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion ist. Ableiten nach y und Gleichsetzen mit v_2 liefert

$$2x^2 e^{2y} + x + \tilde{\varphi}'(y) = 2x^2 e^{2y} + 2e^{2y} + x,$$

also folgt $\tilde{\varphi}(y) = e^{2y}$ und ein Potential von $\vec{v}$ ist gegeben durch

$$\varphi(x,y) = (x^2+1)e^{2y} + xy, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Es gilt: $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ist abgeschlossener und beschränkter Integrationsbereich, $\partial V = \mathcal{F}$ lässt sich zerlegen in endlich viele reguläre Flächenstücke und $\vec{N}$ weist ins Äußere von V. Da $\vec{w} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, lässt sich der Divergenzsatz anwenden und wir erhalten

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do = \iiint_V \nabla \cdot \vec{w}\, d(x,y,z) = \iiint_V y + 1\, d(x,y,z).$$

Substituiere mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$. Wegen $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ folgt $1 \le r \le 2$ und aus $y \ge 0$ folgt $\varphi \in [0,\pi]$. Für z erhalten wir $0 \le z \le r^2\cos^2\varphi$. Insgesamt:

$$\begin{aligned}
\iiint_V y + 1\, d(x,y,z) &= \int_0^\pi \int_1^2 \int_0^{r^2\cos^2\varphi} (r\sin\varphi + 1) r\, dz\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_1^2 (r\sin\varphi + 1) r^3 \cos^2\varphi\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^\pi \left[\tfrac{1}{5} r^5 \sin\varphi\cos^2\varphi + \tfrac{1}{4} r^4 \cos^2\varphi\right]_{r=1}^2 d\varphi \\
&= \tfrac{31}{5} \int_0^\pi \sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi + \tfrac{15}{4} \int_0^\pi \cos^2\varphi\, d\varphi \\
&= \tfrac{31}{5} \left[-\tfrac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_{\varphi=0}^\pi + \tfrac{15}{4}\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{62}{15} + \tfrac{15}{8}\pi.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4

a) (i) Da die Funktion $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z-2}\right)$ holomorph auf $G := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < \frac{5}{2}\}$ ist und die Kreisline $|z+1| = 2$ in G liegt, folgt mit der Cauchyschen Integralformel:

$$\oint_{|z+1|=2} \frac{\sin\left(\frac{1}{z-2}\right)}{z^2} = 2\pi i f'(0) = -\,2\pi i \cos(\tfrac{1}{z-2}) \frac{1}{(z-2)^2}\bigg|_{z=0} = -\frac{\pi i}{2}\cos\frac{1}{2}.$$

(ii) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z-3} z e^{\frac{1}{3-z}}$ besitzt in $z_0 = 3$ eine wesentliche Singularität (und ist auf $\mathbb{C}\backslash\{3\}$ holomorph). Wir bestimmen die Laurententwicklung von f um den Punkt $z_0 = 3$, lesen das Residuum von f in z_0 ab und bestimmen den Wert des Integrals anschließend mit Hilfe des Residuensatzes.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z-3+3)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{3-z}\right)^n}{z-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(3-z)^{-n} + \frac{3}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(3-z)^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^n}{(-n)!}(z-3)^n + \frac{3}{z-3}\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(-1)^n}{(-n)!}(z-3)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^n}{(-n)!}(z-3)^n + 3\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(-1)^n}{(-n)!}(z-3)^{n-1} \end{aligned}$$

Wir können jetzt schon ablesen:

$$\operatorname{res}(f;3) = \frac{(-1)^1}{1!} + 3\frac{(-1)^0}{0!} = 2.$$

Der Resiudensatz liefert somit für das gesuchte Integral:

$$\oint_{|z|=4} \frac{z e^{\frac{1}{3-z}}}{z-3}\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(f;3) = 4\pi i.$$

b) Für die Fouriertransformierte von f gilt:

$$\mathscr{F} f(\xi) = \mathscr{F}\left\{x \mapsto \tfrac{1}{1+9x^2}\right\}(\xi) = \tfrac{1}{2}\mathscr{F}\left\{x \mapsto \tfrac{2}{1+(3x)^2}\right\}(\xi) = \tfrac{1}{2}\mathscr{F}\{g(3\,\cdot)\}(\xi) = \tfrac{1}{6}\mathscr{F} g(\tfrac{\xi}{3}),$$

wobei $g := \mathscr{F} h$ und im letzten Schritt eine der Rechenregeln für die Fouriertransformierte verwendet wurde.

Da h stetig, beschränkt, absolut integrierbar und auch $\mathscr{F} h$ absolut integrierbar ist, folgt mit der Fourierinversionsformel

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\underbrace{\mathscr{F} h(\xi)}_{=g(\xi)}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-x)\xi} g(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F} g(-x).$$

Einsetzen in die obere Gleichung liefert nun

$$\mathscr{F} f(\xi) = \frac{1}{6} 2\pi h(-\tfrac{\xi}{3}) = \frac{\pi}{3} e^{-\frac{|\xi|}{3}}.$$