Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
19.09.2013

Klausur
Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 ((6+4) Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (2 + \cos x)^{x^2 y}$.

i) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$ an der Stelle $(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{\pi^2}\right)$.

ii) Berechnen Sie das Taylorpolynom erster Ordnung der Funktion f im Entwicklungspunkt $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{\pi^2}\right)$.

b) Berechnen Sie:

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 3\sqrt{x^4 + 9}\, dx\, dy.$$

Lösung:

a) Es gilt $2 + \cos x > 0$. Also ist f wohldefiniert.

i) Es ist $f(x, y) = (2 + \cos x)^{x^2 y} = \exp(x^2 y \log(2 + \cos x))$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x, y) &= \exp(x^2 y \log(2 \cos x)) \left(2xy \log(2 + \cos x) + x^2 y \frac{1}{2 + \cos x} \cdot (-\sin x)\right) \\
&= xy(2 + \cos x)^{x^2 y} \left(2 \log(2 + \cos x) - x \frac{\sin x}{2 + \cos x}\right),
\end{aligned}$$

also $\partial_x f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{\pi^2}\right) = \frac{2}{\pi}(2 + 0)^1 \cdot \left(2 \log(2 + 0) - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2+0}\right) = \frac{8}{\pi}(\log 2) - 1$, sowie

$$\begin{aligned}
\partial_y f(x, y) &= \exp(x^2 y \log(2 + \cos x)) x^2 \log(2 + \cos x) \\
&= x^2 (2 + \cos x)^{x^2 y} \log(2 + \cos x),
\end{aligned}$$

also $\partial_y f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{\pi^2}\right) = \frac{\pi^2}{4}(2 + 0)^1 \log(2 + 0) = \frac{\pi^2}{2} \log 2$.

ii)

$$\begin{aligned}
P_1(x, y) &= \frac{\partial_x f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{\pi^2}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial_y f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{\pi^2}\right)}{1!}\left(y - \frac{4}{\pi^2}\right) + \frac{f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{\pi^2}\right)}{0!} \\
&= \left(\frac{8}{\pi}(\log 2) - 1\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi^2}{2}(\log 2)\left(y - \frac{4}{\pi^2}\right) + 2.
\end{aligned}$$

b) Es wird insgesamt integriert über die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 8,\ \sqrt[3]{y} \leqslant x \leqslant 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant x^3\}$. Also gilt mit Fubini

$$\begin{aligned}
\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 3\sqrt{x^4 + 9}\, dx\, dy &= \int_0^2 \int_0^{x^3} 3\sqrt{x^4 + 9}\, dy\, dx = 3 \int_0^2 \sqrt{x^4 + 9}\, x^3\, dx \\
&= \frac{3}{4} \int_9^{25} \sqrt{s}\, ds = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}}\right]_9^{25} = \frac{1}{2}(5^3 - 3^3) = \frac{1}{2}(125 - 27) = 49.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 ((5+5) Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x, y) = x^2 + y^4 + \sin^2 x.$$

Bestimmen Sie die kritischen Punkte von g und deren Typ (lokales Minimum, lokales Maximum, Sattelpunkt).

b) Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f(x, y) = xy$ auf der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Lösung:

a) Wir betrachten $\operatorname{grad} g(x, y) = (2x + 2\sin x \cos x, 4y^3)^t = (0, 0)^t$. Die Gleichung $4y^3 = 0$ führt auf $y = 0$. Betrachte nun die Gleichung $h(x) := 2(x + \sin x \cos x) = 0$. Wegen $\sin x \cos x \in [-1, 1]$, muss jede Lösung von $h(x) = 0$ im Intervall $[-1, 1]$ liegen. Wegen $h'(x) = 2(1 + \cos^2 x - \sin^2 x) = 4\cos^2 x > 0$ auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ist h insb. auf $[-1, 1]$ streng monoton wachsend. Also hat $h(x) = 0$ maximal eine Lösung. Wegen $h(0) = 0$, ist 0 diese Lösung. Damit ist $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von g. Wegen $g(0, 0) = 0$ und $g(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$, ist $(0, 0)$ lokales (und sogar globales) Minimum von g.

b) Da $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ kompakt ist und f stetig, wird das Maximum angenommen. Definiere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Es gilt $\operatorname{rang} Dg(x, y) = \operatorname{rang}(2x, 2y) = 1$ auf K, da sonst $x = y = 0$ gelten würde. Ferner ist $K = g^{-1}(\{0\})$. Wir wenden nun die Lagrange-Multiplikatorenregel an: Die Gleichung $\operatorname{grad} f(x, y) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y)$ führt auf $(y, x) = \lambda\,(2x, 2y)$. Zusammen mit der Def. der Menge K erhalten wir die drei Gleichungen

$$y = 2\lambda\, x, \qquad x = 2\lambda\, y, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Setzt man Gl. 2 in Gl. 1 ein, erhält man $y = 4\lambda^2 y$, also $y = 0$ oder $\lambda = \frac{1}{2}$ oder $\lambda = -\frac{1}{2}$. Da $y = 0$ mit Gl. 2 auf $x = 0$ führt und $(0, 0)$ nicht auf dem Einheitskreis liegt, fällt $y = 0$ raus; weiterhin führt $\lambda = \frac{1}{2}$ auf $x = y$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ auf $x = -y$. Gl. 3 führt auf $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Schließlich kann das Maximum nur in folgenden Punkten angenommen werden:

$$p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad p_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad p_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad p_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Wegen $f(p_1) = f(p_2) = \frac{1}{2}$, $f(p_3) = f(p_4) = -\frac{1}{2}$, wird das Maximum in den Punkten p_1, p_2 angenommen und ist $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 3 ((6+4) Punkte)

a) Sei γ die im Gegenuhrzeigersinn orientierte Kurve, die gegeben ist durch das Geradenstück von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$, das Geradenstück von $(1, 0)$ nach $(1, 1)$, und dem Teil der Parabel $y = x^2$ von $(1, 1)$ nach $(0, 0)$.

Sei $\lambda = xy\, dx + x^2\, dy$. Berechnen Sie $\int_\gamma \lambda$ auf zwei Arten:

i) Indem Sie das Kurvenintegral direkt berechnen.

ii) Indem Sie den Satz von Green anwenden.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_E y\, d\mu,$$

wobei $E \subset \mathbb{R}^3$ das Gebiet ist, das unterhalb der Ebene $z = x + 2$, oberhalb der Ebene $z = 0$, und zwischen den Zylindern $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + y^2 = 4$ liegt.

Lösung:

a) i) Definiere $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t,0)$, $\gamma_2(t) = (1,t)$, $\gamma_3(t) = (t,t^2)$. Unter Beachtung der Orientierung von γ gilt dann

$$\begin{aligned}\int_\gamma \lambda &= \int_0^1 \lambda(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt + \int_0^1 \lambda(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,dt - \int_0^1 \lambda(\gamma_3(t))\gamma_3'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 (0\cdot 1 + t^2\cdot 0)\,dt + \int_0^1 (t\cdot 0 + 1\cdot 1)\,dt - \int_0^1 (t^3\cdot 1 + t^2\cdot 2t)\,dt \\ &= 0 + 1 - 3\int_0^1 t^3\,dt = 1 - 3\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

ii) Es ist $d\lambda = (2x - x)\,d\mu = x\,d\mu$. Sei Q die von γ eingeschlossene kompakte Menge. Mit dem Satz von Green und mit Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_\gamma \lambda &= \int_Q d\lambda = \int_0^1\int_0^{x^2} x\,dy\,dx = \int_0^1 [xy]_{y=0}^{y=x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

b) Wir verwenden Zylinderkoordinaten $\Phi(r,\varphi,h) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)$. Es gilt $0 \leqslant z \leqslant x+2$, also $0 \leqslant h \leqslant r\cos\varphi + 2$. Ferner gilt $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, also $0 < \varphi < 2\pi$ und $1 \leqslant r \leqslant 2$. Mit der Transformationsformel und geeigneter Integrationsreihenfolge (Fubini) folgt

$$\begin{aligned}\int_E y\,d\mu &= \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{r\cos\varphi+2} r(r\sin\varphi)\,dh\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_1^2 (r\cos\varphi+2)r(r\sin\varphi)\,dr\,d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3\sin\varphi\cos\varphi + 2r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4\sin\varphi\cos\varphi + \frac{2}{3}r^3\sin\varphi\right]_{r=1}^{r=2} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{15}{4}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{14}{3}\sin\varphi\,d\varphi = \left[\frac{15}{8}\sin^2\varphi - \frac{14}{3}\cos\varphi\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{14}{3}\cos(2\pi) + \frac{14}{3}\cos 0 = 0.\end{aligned}$$

Alternative Möglichkeit (kürzer):

Es sei $E_+ := \{(x,y,z) \in E : y > 0\}$, $E_- := \{(x,y,z) \in E : y < 0\}$. Aus der Definition von E folgt: Ein Punkt (x,y,z) ist genau dann in E_+, wenn $(x,-y,z)$ in E_- ist (d.h. E ist symmetrisch zur Ebene $y = 0$). Damit ist $\Psi : E_+ \to E_-$, $\Psi(x,y,z) = (x,-y,z)$ ein Diffeomorphismus mit $|\det D\Psi(x,y,z)| = 1$, und mit dem Transformationssatz folgt

$$\int_E y\,d\mu = \int_{E_+} y\,d\mu + \int_{E_-} y\,d\mu = \int_{E_+} y\,d\mu + \int_{E_+} -y\,d\mu = 0.$$

Aufgabe 4 ((6+4) Punkte)

a) Sei $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4}}\right\}$ die obere Hälfte eines Ellipsoids. Sei n die stetige Einheitsnormale auf E, die ins Äußere des Ellipsoids zeigt. Das Vektorfeld G sei gegeben durch $G(x,y,z) = \left(-y,\, e^y,\, xye^{z^2}\right)$ und es sei $F = \operatorname{rot} G$. Berechnen Sie den Fluss von F durch die mit n orientierte Fläche E.

b) Sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 1 + \frac{3}{2}e^{it}$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{z^3+1}{z(z+i)}\,dz.$$

Lösung:

a) Der Fluss ist gegeben durch $\int_E F \cdot n \, d\sigma = \int_E \operatorname{rot} G \cdot n \, d\sigma$. Mit dem Satz von Stokes gilt $\int_E \operatorname{rot} G \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial E} G \cdot \vec{dx}$, wobei ∂E der positiv orientierte Rand von E ist. Der Rand ist gegeben durch $\partial E = \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : 0 = 2\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4}}\right\}$ und $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, 2\sin t, 0)$ ist eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes. Also gilt

$$\begin{aligned}
\int_E F \cdot n \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (-2\sin t) \cdot (-\sin t) + e^{2\sin t} \cdot 2\cos t + 0 \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2\sin^2 t + 2e^{2\sin t} \cos t \, dt = 2\pi + [e^{2\sin t}]_0^{2\pi} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Dabei wurde $\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = [-\sin t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} 1 - \sin^2 t \, dt$ verwendet, also $\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \pi$. Der Fluss durch die mit n orientierte Fläche E ist also 2π.

b) *1. Möglichkeit: Mit Cauchyscher Integralformel*

Partialbruchzerlegung führt auf $\frac{z^3+1}{z(z+i)} = \frac{-i}{z} + \frac{z^2+i}{z+i}$. Da 0 und $-i$ in $B_{\frac{3}{2}}(1)$ liegen, gilt mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{z^3+1}{z(z+i)} \, dz &= \int_\gamma \frac{-i}{z} \, dz + \int_\gamma \frac{z^2+i}{z+i} \, dz \\
&= 2\pi i(-i) + 2\pi i[(-i)^2 + i] = -2\pi i.
\end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Mit Residuensatz

Innerhalb $B_{\frac{3}{2}}(1)$ liegen die beiden einfachen Pole 0 und $-i$. Ist z_0 einer dieser Pole und $h(z) := z^3 + 1$, $g(z) := z(z+i)$, so gilt $\operatorname{Res}\left(\frac{h(z)}{g(z)}, z_0\right) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$, also $\operatorname{Res}\left(\frac{z^3+1}{z(z+i)}, 0\right) = \frac{1}{i} = -i$, $\operatorname{Res}\left(\frac{z^3+1}{z(z+i)}, -i\right) = \frac{(-i)^3+1}{-2i+i} = -1 + i$. Mit dem Residuensatz folgt

$$\int_\gamma \frac{z^3+1}{z(z+i)} \, dz = 2\pi i(-i + (-1 + i)) = -2\pi i.$$